第 22 卷 第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.22 No.3
2001 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul.2001

文章编号 1000-5013(2001)03-0225-07

未失效信息的作用与最大似然估计的缺陷

吴绍敏　彭　霈

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要　提出非参数分析方法, 排除分布模型的限制, 扩大应用范围, 从而发现最大似然估计法的缺陷. 分析在何种场合该用最大似然估计法, 或者此文所提的方法.

关键词　寿命试验, 非参数分析, 失效信息

中图分类号　O 212.6: O 211.67　　文献标识码　A

有一批产品, 其型号、材料、制造设备、工艺、技术等因素都一样. 记该批产品的寿命为 T 且服从 $f(t,\theta)$ 分布, 从中抽取 n 只样品作寿命试验. 结果是在 t_i 处失效 r_i 只($i=\overline{1,m}$), $t_1<t_2<\cdots<t_m$, 则似然函数 $L(t_1,t_2,\cdots,t_m|\theta)=\prod_{i=1}^{m}f^{r_i}(t_i,\theta)[1-F(t_m,\theta)]^{n-\sum_{i=1}^{m}r_i}$. 由此求得 θ 的 MLE. 但人们却忽视了一个重要信息, 即只利用在 t_i 处的 r_i 个失效信息, 却没有利用 t_i 处尚有 $(n-\sum_{k=1}^{i}r_k)$ 个尚未失效的信息[1~3]. 以离散型分布为例, 设产品寿命 $T\sim P_r(T=t,\theta)$, 任取两个样品进行试验, 其似然函数为 $L(t_1,t_2|\theta)=P_r(T=t_1,\theta)P_r(T=t_2,\theta)$. 但第 2 个样品在 t_1 未失效的信息, 却没有反映出来. 实际上在 t_1 处第 1 个失效第 2 个却未失效, 到 t_2 才失效. 那么, 在 (t_1,t_2) 发生的概率应是 $P_r(T_1=t_1,\theta)P_r(T_2>t_1,\theta)P_r(T_2=t_2,\theta)=P_1(1-P_1)P_2$, $P_i=P_r(T=t_i,\theta)(i=1,2)$. 因此, 极大似然估计 $\hat{\theta}_L$ 将与本文的估计相差较大.

1　产品失效概率的估计

1.1　记号

设产品寿命为 T, 任取 n 个样品作寿命试验. 结果在 t_i 处有 r_i 个失效, 记 $P_i=P_r(T\le t_i)$, $R_i=1-P_i=P_r(T>t_i)$ $(i=\overline{1,m})$, $t_1<t_2<\cdots<t_m$. 因此, 在 $(t_1,t_2,\cdots,t_m)$ 处试验结果的概率为

$$P_r(r_1,r_2,\cdots,r_m|P_1P_2,\cdots,P_m)=\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i}. \tag{1}$$

其中 $S_i=n-\sum_{k=1}^{i}r_k$, $P_i^{r_i}(1-P_i^{S_i})$ 表示在 t_i 处有 r_i 个失效、S_i 个尚未失效的概率 $(i=\overline{1,m})$. (1) 由贝叶斯假设 $P_i\sim V(0,1)$ $(i=\overline{1,m})$ 且相应独立其密度函数 $\pi(P_i)=\begin{cases}1 & 0<P_i<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ $(i=\overline{1,m})$. 因

收稿日期　2001-01-16　　作者简介　吴绍敏(1933-), 男, 教授
基金项目　福建省自然科学基金资助项目

此, $P=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ 的密度函数为

$$\pi(P)=\begin{cases}1 & P\in D,\\ 0 & P\overline{\in} D,\end{cases}\qquad D=\{P:P_1<P_2<\cdots<P_m\}.\tag{2}$$

因 $V(D)=m!\int_0^{P_2}\mathrm{d}P_1\int_0^{P_3}\mathrm{d}P_2\cdots\int_0^1\mathrm{d}P_m=1$, $\Pi(P)=\begin{cases}\dfrac{1}{V(D)} & P\in D\\ 0 & P\overline{\in} D\end{cases}$. 记 $r(1)=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$ 则 $r(1)$ 的验前分布为 $f(r(1))=k\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i}$, 其中 $\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i}$ 称为核函数, $f(r(1))$ 与核函数仅差1个比例常数 k. 因此, $r(1)$ 与 P 的联合验前分布为

$$f(P,r(1))=\begin{cases}k\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i} & P\in D,\\ 0 & P\overline{\in} D.\end{cases}\tag{3}$$

P 的验后分布为

$$f(P|r(1))=\begin{cases}\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i}\Big/\int_D\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i} & P\in D,\\ 0 & P\overline{\in} D.\end{cases}\tag{4}$$

因此, 可得 $f(P|r(1))=f(P,r(1))/\int_D f(P,r(1))\mathrm{d}P=\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i}/\int_D\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{S_i}\mathrm{d}P_i$, $P\in D$.

1.2 定理

定理1 P_1 的后验密度函数为 $f(P_1|r(1))=W_m^{-1}\sum_{j_m=\beta_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_2=\beta_2}^{g_2}W(j_m,j_{m-1}\cdots j_2)\cdot B(P_1|\alpha_1\beta_1)$, 其中

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_m=r_m+1,\quad \beta_m=S_m+1,\quad g_m=\alpha_m+\beta_m-1,\quad S_m=n-\sum_{k=1}^{m}r_k,\\ &\alpha_i=r_i+g_{i+1}+1-j_{i+1},\quad \beta_i=S_i+1+j_{i+1},\quad g_i=\alpha_i+\beta_i-1,\\ &S_i=m-\sum_{k=1}^{i}r_k(i=\overline{1,m}),\quad G_{ji}=\binom{g_i}{j_i}B(\alpha_{i-1},\beta_{i-1}),\\ &g_i=S_{i-1}+g_{i+1}+1(i=\overline{2,m-1}),\quad W(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2)=\prod_{i=2}^{m}C_{ji}.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

证明 因 $f(P_1|r(1))=W_m^{*-1}\{P_1^{r_1}(1-P_1)^{S_1}\int_{P_1}^1P_2^{r_2}(1-P_2)^{S_2}\mathrm{d}P_2\cdots\int_{P_{m-1}}^1P_m^{r_m}(1-P_m^{S_m})\mathrm{d}P_m\}$, $W_m^*=\int_D\prod_{i=1}^{m}P_i^{r_i}(1-P_i)^{r_i}\mathrm{d}P_i$, $D=\{P:0<P_1<P_2<\cdots<P_m<1\}$. 重复应用恒等式, 有

$$\int_y^1x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x=B(\alpha,\beta)\sum_{j=\beta}^{\alpha+\beta-1}\binom{\alpha+\beta-1}{j}y^{\alpha+\beta-1-j}(1-y)^j.\tag{6}$$

同时, 有 $I_m=\int_{P_{m-1}}^1P_m^{r_m}(1-P_m)^{S_m}\mathrm{d}P_m=\int_{P_{m-1}}^1P_m^{r_m+1-1}(1-P_m)^{S_m+1-1}\mathrm{d}P_m=\int_{P_{m-1}}^1P_m^{\alpha_m-1}(1-P_m)^{\beta_m-1}\mathrm{d}P_m=B(\alpha_m,\beta_m)\sum_{j_m=\beta_m}^{g_m}\binom{g_m}{j_m}P_{m-1}^{g_m-j_m}(1-P_{m-1})^{j_m}$, $I_{m-1}=\int_{P_{m-2}}^1P_{m-1}^{r_m-1}(1-$

$P_{m-})^{S_m-1} I_m \mathrm{d}P_{m-1} = B(\alpha_m \beta_m) \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \binom{g_m}{j_m} B(\alpha_{m-1}\beta_{m-1}) \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \binom{g_{m-1}}{j_{m-1}} P_{m-2}^{g_{m-1}-r_{m-1}} (1-P_{m-1})^{j_{m-1}}$, $I_{m-2} = \int_{P_{m-3}}^{1} P_{m-2}^{r_{m-2}} (1-P_{m-2})^{S_{m-2}} I_{m-1} \mathrm{d}P_{m-2} = B(\alpha_m, \beta_m) \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \binom{g_m}{j_m} B(\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}) \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \binom{g_{m-1}}{j_{m-1}} \int_{P_{m-3}}^{1} P_{m-2}^{\alpha_{m-2}-1} (1-P_{m-2})^{\beta_{m-1}-1} \mathrm{d}P_{m-2} = B(\alpha_m, \beta_m) \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \binom{g_m}{j_m} B(\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}) \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \binom{g_{m-1}}{j_{m-1}} B(\alpha_{m-2}, \beta_{m-2}) \sum_{j_{m-2}=\beta_{m-2}}^{g_{m-2}} \binom{g_{m-2}}{j_{m-2}} P_{m-3}^{g_{m-2}-j_{m-2}} (1-P_{m-3})^{j_{m-2}}$, $I_2 = \int_{P_1}^{1} P_2^{r_2} (1-P_2)^{S_2} I_3 \mathrm{d}P_2 = B(\alpha_m, \beta_m) \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \binom{g_m}{j_m} B(\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}) \cdots B(\alpha_2, \beta_2) \sum_{j_2=\beta_2}^{g_2} \binom{g_2}{j_2} P_1^{g_2-j_2} (1-P_1)^{j_2}$, $I_1 = P_1^{r_1} (1-P_1)^{S_1} I_2 = B(\alpha_m, \beta_m) \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \binom{g_m}{j_m} B(\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}) \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \binom{g_{m-1}}{j_{m-1}} B(\alpha_{m-2}, \beta_{m-2}) \sum_{j_{m-2}=\beta_{m-2}}^{g_{m-2}} \binom{g_{m-2}}{j_{m-2}} B(\alpha_{m-3}, \beta_{m-3}) \cdots \sum_{j_2=\beta_2}^{g_2} \binom{g_2}{j_2} B(\alpha_1, \beta_1) B(P_1 | \alpha_1, \beta_1)$, $f(P_1 | r(1)) = I_1 / W_m^*$, $\int_0^1 f(P_1 | r(1)) \mathrm{d}P_1 = 1$.

得 $W_m^* = \beta(\alpha_m, \beta_m) W_m$, 即得定理 1.

推论 1　在二次损失下 P_1 的贝叶斯估计为

$$\hat{P}_1 = W_m^{-1} \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_2=\beta_2}^{g_2} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_2) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1}\right). \tag{7}$$

证明　$B(P | u, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(u,v)} P^{u-1} (1-P)^{v-1} & 0 < P < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, $\hat{P} = E(P | u, v) = \dfrac{u}{u+v}$, 立即可以得到式(7).

推论 2　考虑 $0 < P_2 < P_3 < \cdots < P_m < 1$, 即得 $f(P_2 | r(2)) = W_{m-1}^{-1} \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_3=\beta_3}^{g_3} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_3) B(P_2 | \alpha_2, \beta_2)$, 其中 $W_{m-1} = \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_3=\beta_3}^{g_3} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_3)$. 在二次损失下, P_2 的贝叶斯估计为 $\hat{P} = W_{m-1}^{-1} \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_3=\beta_3}^{g_3} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_3) \left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)$. 一般地, 因 (r_{i-1}, S_{i-1}) $(i = \overline{2, k})$ 无法提供 P_K 的信息, 故有

$$f(P_K | r(k)) = W_{m-K+1}^{-1} \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_{k+1}) B(P_k | \alpha_k, \beta_k), \tag{8}$$

其中 $W_{m-k+1} = \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_{k+1})$, $r(k) = (r_k, r_{k+1} \cdots r_m)$ $(k = \overline{1, m-1})$. 在二次损失下, 有

$$\hat{P}_K = W_{m-k+1}^{-1} \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_{k+1}) \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\beta_k}\right). \tag{9}$$

因 $f(P_m | r_m) = P_m^{r_m+1-1} (1-P_m)^{S_m+1-1} / B(\alpha_m, \beta_m)$, 故

$$\hat{P}_m = E(P_m | \alpha_m, \beta_m) = \frac{r_m+1}{r_m+S_m+2}$$

定理 **2** 可得以下公式

$$\hat{P}_k < \hat{P}_{k+1} \qquad (k = \overline{1, m-1}). \tag{10}$$

证明 由式(9)知 $\hat{P}_{k+1} = W_{m-k}^{-1} \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_{k+2}=\beta_{k+2}}^{g_{k+2}} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_{k+2})\cdot(\frac{r_{k+1}+g_{k+2}+1-j_{k+2}}{r_{k+1}+S_{k+1}+g_{k+2}+2})$. (1) 因 W_{m-k+1}中的每个被加项均大于零且 W_{m-k+1}比 W_{m-k}多一重和, 故 $W_{m-k} < W_{m-k+1}$. (2) $\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\beta_k} = \frac{r_k+g_{k+1}+1-j_{k+1}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2} \le \frac{r_k+g_{k+1}+1-\beta_{k+1}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2} = \frac{r_k+g_{k+1}+1-S_{k+1}-1-j_{k+2}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2} = \frac{r_k+g_{k+1}-S_{k+1}-j_{k+2}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2} = \frac{r_k+g_{k+2}+S_k+1-S_{k+1}-j_{k+2}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2} = \frac{r_k+g_{k+2}+r_{k+1}+1-j_{k+2}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2} = \frac{r_R}{r_k+g_{k+1}+S_k+2} + \frac{r_{k+1}+g_{k+2}+1-j_{k+2}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2}$. (3) 有

$$\sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} C_{j_{k+1}} = \sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} \binom{g_{k+1}}{j_{k+1}} B(\alpha_k, \beta_k) =$$

$$\sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} \frac{g_{k+1}!}{j_{k+1}!(g_{k+1}-j_{k+1})!} \frac{(r_{k+1}+g_{k+1}-j_{k+1})!(S_{k+1}+j_{k+1})!}{(r_{k+1}+S_{k+1}+g_{k+1}+1)!} <$$

$$\frac{g_{k+1}-\beta_{k+1}}{r_{k+1}+S_{k+1}+g_{k+1}-1} = \frac{\alpha_{k+1}-1}{S_k+g_{k+1}+1} =$$

$$\frac{r_{k+1}+g_{k+2}-j_{k+2}}{S_k+g_{k+1}+1} < \frac{r_{k+1}+g_{k+2}}{S_k++g_{k+1}+1} = \frac{r_{k+1}+g_{k+2}}{2S_k+g_{k+2}+1} \ll 1.$$

(4) $\sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} C_{j_{k+1}}(\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\beta_k}) < \frac{r_{k+1}+g_{k+2}}{2S_k+g_{k+2}+1}(\frac{r_k}{r_k+S_k+g_{k+1}+2} + \frac{r_{k+1}+g_{k+2}+1-j_{k+2}}{r_k+g_{k+1}+S_k+2}) < \frac{r_{k+1}+g_{k+2}+1-j_{k+2}}{r_k+2S_k+g_{k+2}+3} < \frac{r_{k+1}+g_{k+2}+1-j_{k+2}}{r_{k+1}+g_{k+2}+S_{k+1}+1} = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_{k+1}+\beta_{k+1}}$. 最后的第 2 个不等式是因前项的第 1 个因子很小, 第 2 个因子第 1 项小于 1, 故得 $\hat{P}_k < \hat{P}_{k+1}$.

为了便于 $\hat{P}_k (k = \overline{1, m})$ 的计算, 可将式(9)改写成形式为

$$W_{m-k+1} = \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{g_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} \prod_{i=k+1}^{m} \frac{g_i!}{g_{i-1}!} \frac{(S_{i-1}+j_i)!}{j_i!} \frac{(r_{i-1}+g_i-j_i)!}{(g_i-j_i)!}, \tag{11}$$

$$I_k = \sum_{j_m=\beta_m}^{g_m} \sum_{j_{m-1}=\beta_{m-1}}^{g_{m-1}} \cdots \sum_{j_{k+1}=\beta_{k+1}}^{g_{k+1}} .$$

$$\prod_{i=k+1}^{m} [\frac{g_i!(S_{i-1}+j_i)!(r_{i-1}+g_i-j_i)!}{g_{i-1}!\ j_i!\ (g_i-j_i)!}](\frac{r_k+g_{k+1}+1-j_{k+1}}{r_k+S_k+g_{k+1}+2}), \tag{12}$$

$\hat{P}_k = I_k / W_{m-k+1}, (k = \overline{1, m-1}), \hat{P} = \frac{r_m+1}{S_m+r_m+2}$. 由此可得下面的可靠性指标. (1) 在 t_k 处的可靠度 $\hat{P}_k = 1 - \hat{P}_k (k = \overline{1, m})$. (2) 在区间$(t_{k-1}, t_k]$ 上的失效率 $\hat{\lambda}_k = (\hat{P}_k - \hat{P}_{k-1}) / (t_k - t_{k-1}) \cdot \hat{P}_{k-1} (k = (\overline{1, m-1})$, 其中 $t_0 = 0, \hat{P}_0 = 0, \hat{R}_0 = 1$. (3) 产品的平均失效率 $\hat{\lambda} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\hat{\lambda}_k$, 故式(11), (12)可使用电子计算机计算.

2 寿命分布的参数估计

上节讨论当产品寿命分布未知时, 对其失效率与可靠度的估计. 即当产品的寿命 T 服从

$f(t,\theta)$ 分布且参数 θ 未知时,如何应用上节方法对其可靠性指标作出估计 .

(1) 若已知产品寿命 $T \sim f(t,\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-t/\theta}, t > 0$. 取 n 个样品作寿命试验,其结果是在 t_k 处有 r_k 个失效,$(t_1 < t_2 < \cdots < t_m)$ 可由式(11),(12) 算出 t_k 处的 $\hat{P}_k$ 与 $\hat{R}_k$. 由于 $R_t = e^{-t_k/\theta}$, $-\ln R_k = t_k/\theta (k = \overline{1,m})$,所以 $-\sum_{k=1}^{m}\ln R_k = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{m}t_k$. 因此,可得 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B = \sum_{k=1}^{m}t_k / (-\sum_{k=1}^{m}\ln\hat{R}_k), \tag{13}$$

它与 $m, t_k, \hat{R}_k$ 有关 . 而 θ 的最大似然估计为

$$\hat{\theta}_L = (\sum_{k=1}^{m}r_k t_k + (n - \sum_{i=1}^{m}r_i)t_m) / \sum_{k=1}^{m}r_k. \tag{14}$$

特别当 $m = n, r_i = 1(i = \overline{1,n})$ 时,$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,则 $S_1 = n-1, S_2 = n-2, \cdots, S_n = 0$. 这就是全寿命试验,则式(13),(14) 变为

$$\hat{\theta}_B = \sum_{k=1}^{n}t_k / (-\sum_{k=1}^{n}\ln R_k), \qquad \hat{\theta}_L = \sum_{k=1}^{n}t_k / n. \tag{15}$$

显然有下述 3 点: (1) 当 $\hat{R}_k = e^{-1} = 0.3679(k\ \overline{1,n})$ 时,$\hat{\theta}_B = \hat{\theta}_L$; (2) 当 $e^{-1} < \hat{R}_k < 1$ 时,$\hat{\theta}_B > \hat{\theta}_L$; (3) 当 $0 < \hat{R}_k < e^{-1}$ 时,$\hat{\theta}_B < \hat{\theta}_L$.

(2) 若 $T \sim W(t,\alpha,\eta) = \frac{\alpha}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{\alpha-1}e^{-(\frac{t}{\eta})^{\alpha}}(t > 0)$,则 $R(t) = e^{-(\frac{t}{\eta})^{\alpha}}$, $\ln(-\ln R(t)) = \alpha\ln t - \alpha\ln\eta$. 记 $y = \ln(-\ln R(t))$, $a = -\alpha\ln\eta$, $b = \alpha$, $x = \ln t$,则 $y = a + bx$ 是线性模型 . 那么,由试验获得的数据 $(x_i, y_i)(i = \overline{1,m})$ 按最小二乘法,可求得 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\hat{b} = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2$, $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln t_i$, $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln(-\ln\hat{R}_i)$. 再由 $\begin{cases}\hat{a} = -\alpha\ln\eta \\ \hat{b} = \alpha\end{cases}$ 可解得 $\hat{\alpha}$ 与 $\hat{\eta}$,则有 $\hat{F}_w(t) = 1 - e^{-(\frac{t}{\hat{\eta}})^{\hat{\alpha}}}(t > 0)$. 由此,可得所有的可靠性指标 .

(3) 一般地,若 $T \sim F(\frac{t-\mu}{\eta})$ 其 F 的反函数 F^{-1} 存在,则由 $R(t) = 1 - F(\frac{t-\mu}{\eta})$, $1 - R(t) = F(\frac{t-\mu}{\eta})$, $\frac{t-\mu}{\eta} = F^{-1}(1 - R(t))$, $\frac{t}{\eta} - \frac{\mu}{\eta} = F^{-1}(1 - R(t))$,可得 $y = F^{-1}[1 - R(t)]$, $a = -\mu/\eta$, $b = 1/\eta$. 同样,可得线性模型 $y = a + bt$. 再根据数组 $(x_i, y_i)(i = \overline{1,m})$ 按最小二乘法,可求得 $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln t_i$, $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln(-\ln\hat{R}_i)$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx}$. 从 $\hat{a} = -\mu/\eta$ 和 $\hat{b} = \eta^{-1}$,可解出 μ 与 η 的估计 .

此类分布还有几何分布、极值 I 型分布、正态分布、对数正态分布,等等 . 它们都可应用该方法进行分析 .

3　算例与分析

3.1　算例

为了说明问题这里举 1 个数值例子,虽然它不是实际试验的结果,但也不失一般性 . 下面用两种情况加以分析比较,以证实上述理论分析的正确性 . 设 $T \sim f(t,\theta) = \frac{1}{\theta} = e^{-\frac{t}{\theta}}(t \geq 0)$.

(1) 取 $n = 10$ 个样品,试验时间(h) 为 $t_1 = 10, t_2 = 20, t_3 = 30, t_4 = 40, t_5 = 50, t_6 = 60, t_7 = 70, t_8 =$

80, $t_9=90$, $t_{10}=100$, 作全寿命试验．利用未失效信息分析, 其结果如表1所示．(2) 没有利用未失效信息分析, 结果如表1所示．

表1　利用与没利用未失效信息分析结果对照表

k	1	2	3	4	…	7	8	9	10	Σ
t_k	10	20	30	40	…	70	80	90	100	550
$r_k^{(1)}$	1	1	1	1	…	1	1	1	1	10
$r_k^{(2)}$	1	1	1	1	…	1	1	1	1	10
$S_k^{(1)}$	9	8	7	6	…	3	2	1	0	45
$S_k^{(2)}$	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0
$\hat{P}_k^{(1)}$	4.0×10^{14}	7.0×10^{12}	3.0×10^{10}	1.0×10^{-5}	…	0.21	0.29	0.43	0.67	
$\hat{P}_k^{(2)}$	3.0×10^{-7}	1.0×10^{-5}	2.7×10^{-4}	4.5×10^{-3}	…	0.41	0.46	0.53	0.67	
$\hat{R}_k^{(1)}$	0.9^{12}	0.9^{9}	0.9^{5}	0.9^{3}	…	0.79	0.71	0.57	0.33	
$\hat{R}_k^{(1)}$	0.9^{6}	0.9^{4}	0.9^{3}	0.9^{2}	…	0.59	0.54	0.47	0.33	
$\log\hat{R}_k^{(1)}$	-4.1×10^{-13}	-7.0×10^{-10}	-3.0×10^{-7}	-1.0×10^{-4}	…	-0.24	-0.35	-0.56	-1.1	-2.46
$\log\hat{R}_k^{(2)}$	-2.5×10^{-7}	-1.4×10^{-5}	-2.7×10^{-4}	-4.6×10^{-3}	…	-0.52	-0.61	-0.76	-1.09	-3.53
$\hat{\lambda}_k^{(2)}$	4.0×10^{-15}	7.0×10^{-12}	3.0×10^{-4}	1.0×10^{14}	…	0.006	0.01	0.019	0.042	0.094
$\hat{\lambda}_k^{(2)}$	2.5×10^{-8}	1.4×10^{-6}	2.5×10^{-5}	4.2×10^{-4}	…	0.006	0.009	0.014	0.028	0.096

从表1可得到利用未失效信息的可靠性指标．其中平均失效率 $\hat{\lambda}=0.094$; 平均寿命 $\hat{\theta}_B=\sum_{k=1}^{10}t_k/(-\sum_{k=1}^{10}log\hat{R}_k)=\dfrac{550}{2.455\ 3}=224.01$; 平均失效率 $\hat{\lambda}_B=1/\hat{\theta}_B=0.004\ 5$; 可靠度 $R_B^{(1)}(t)=e^{-0.004\ 5t}$; 最大似然估计 $\hat{\theta}_L=\sum_{k=1}^{10}t_k/n=55$, $\hat{\lambda}_L=0.018$, $R_L^{(1)}(t)=e^{-0.018t}$. 从表中还可得到没有利用未失效信息的可靠性指标．其中平均失效率 $\hat{\lambda}=0.096$; 平均寿命 $\hat{\theta}_B=\sum_{k=1}^{10}t_k/(-\sum_{i=1}^{10}\log R_i)=155.82$; 平均失效率 $\hat{\lambda}_B=6.4\times10^{-3}$, $R_B^{(1)}=e^{-0.006\ 4t}$; 最大似然估计 $\hat{\theta}_L=\dfrac{550}{10}=55$, $\hat{\lambda}_L=0.018$.

从表2可见, $R_B^{(1)}(t)>R_B^{(2)}(t)>R_L(t)$, 正好说明未失效信息的作用．

表2　可靠度比较表

k	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$R_L(t)$	0.833 6	0.694 9	0.579 3	0.482 9	0.402 5	0.335 5	0.279 7	0.233 2	0.194 4	0.162 0
$R_B^{(1)}(t)$	0.956 0	0.913 9	0.873 7	0.835 3	0.798 5	0.763 4	0.729 7	0.097 7	0.666 9	0.637 0
$R_B^{(2)}(t)$	0.933 8	0.879 9	0.825 3	0.774 1	0.726 1	0.681 1	0.638 9	0.599 2	0.562 1	0.527 3

3.2　分析

从算例可见, 这两种估计结果的差异显著, 但其中有一种更合理．当然不会怀疑最大似然估计法, 因为它的历史太长了．一定认为本文的方法有问题, 但可考虑下述两个问题．(1) 传统的方法估计产品的寿命只用它的失效信息而不用其未失效信息．众所周知"信息"是非常重要的资源, 不管正或反两面的信息都是宝贵的资源, 都应该利用．(2) 传统的方法估计出来的平均寿命都要小于 t_m.

从表1分析的结果发现在10个试验点中, 有10个"失效信息", 45个"未失效信息". 平均每点有一个"失效信息"与4.5个"未失效信息". 因此, 平均寿命大大提高且有 $\hat{\theta}_B=224.1$ 是 $\hat{\theta}_L=55$ 的4.1倍, 即 $\hat{\theta}_B$ 4.1$\hat{\theta}_L$．并且 $\hat{\theta}_B>t_{10}=100$, 显然这个结论是合理的．表1的分析的结果可发现不利用"未失效信息"则 $\hat{R}_k$ 下降, 因此 $\hat{\theta}_B$ 减少．但每点仅有一个"失效信息"对 $\hat{R}_k$ 的降

低没有足够的影响, 即产品的质量不算太差, 故仍有 $\hat{\theta}_B = 2.8\hat{\theta}_L$ 且 $\hat{\theta}_B > t_{10} = 100$. 这就存在一个是 $\hat{\theta}_B$ 过高或是 $\hat{\theta}_L$ 太低的问题. 如半导体产品, 其寿命服从指数分布, 其理论寿命无限长. 但是, 由于材料、制造技术等因素, 它是不可能实现的, 然而可肯定其寿命都很长. 可是, 在一次检验之后就断定其寿命是 $\hat{\theta}_L = 55 < t_{10} = 100$, 似乎也不可靠.

从表 1 可以看出, 在 t_k 处"失效"与"未失效"信息个数的变化, 对 $\hat{\theta}_B$ 有灵敏的反应, 对 $\hat{\theta}_L$ 却无反应. 由此可见, 本文的方法是正确的且比极大似然估计法优越.

4　最大似然估计的问题

任何一种方法都不是十全十美, 总有局限性. 因此, 认为最大似然估计法是万能的且最优, 到处可以应用是不妥当的. 因为人们总是考虑样本在概率意义下, 独立应用最大似然估计法, 而没有考虑其它"性质"是否独立.

(1) 例如对人口寿命的调查. 在估计某个国家或某个地区的人口平均寿命时, 样本在概率意义下是独立的. 这是因为每个人的生活环境、习惯、营养水平、劳动强度以及文化、职业等因素的不同, 以致彼此没有联系. 即各个人的"个性"是独立的, 且是真正的独立. 因此, 样本不是是概率意义下独立, 而且其"个性"也是独立的. 诸如比类问题, 没法利用"未失效信息"法只能采用 MLE 方法才是正确的.

(2) 对某一厂家生产的同型号产品而言, 样本的原材料, 制造设备、设计水平、工艺与制造技术水平等因素是一样的. 那么, 样本在概率意义下是独立的. 但样本点的"个性"却不独立, 每个样本点的"失效信息"与"不失效信息"都对估计总体的寿命特征值有用. 对诸如此类问题就不该应用最大似然估计来分析, 应该用本文的方法.

参　考　文　献

1　复旦大学编. 概率: 第 2 分册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. 179～180

2　戴树森, 费鹤良, 王玲玲等. 可靠性试验及其统计分析: 下册[M]. 北京: 国防工业出版社, 1984. 1～6

3　吴绍敏, 程细玉. Weibull 分布步加应力寿命试验统计分析[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1999, 20(2): 109～114

Role of Zero-Failure Information and Shortcomings of Maximum Likelihood Estimation

Wu Shaomin　　Peng Pei

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A method of non-parametric analysis is presented. The method removes the restriction of distributed model and enlarges application range. Thus the shortcomings of maximm likelihood estimation can be found. An analysis is made on what occasion the maximum lihelihood estimation or the authors' method should be used.

Keywords　life test, non-parametric analysis, failure information