第22卷　第3期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.22　No.3
2001年7月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul.2001

文章编号　1000-5013(2001)03-0221-04

有关平均值的不等式及其证明

宋　海　洲

(华侨大学经济管理学院,泉州 362011)

摘要　对两个平均值不等式,给出只用一元函数一阶导数的证明方法.同时对更为一般的平均值不等式,给出了统一的证明.

关键词　平均值,不等式,一阶导数

中图分类号　O 172.1　　　文献标识码　A

文献[1]给出了下面两个有关平均值的不等式[2]的3种证明方法.本文修正了其证法3(Lagrange 乘数法),并给出了这两个有关平均值的不等式的只用一元函数一阶导数的证明方法.进一步,给出了有关平均值的不等式推广形式及其证明.

1　两个平均值不等式的一阶导数证法

定理1　设 $a_i>0, i=1,2,\cdots,n, n\in N$,则

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)/n \geq (\prod_{i=1}^{n}a_i)^{1/n},\quad (\sum_{i=1}^{n}a_i/n)^r \leq (\sum_{i=1}^{n}a_i^r)/n(r\geq 1).\tag{1}$$

证明　一阶导数证法.

(1) 当 $n=2$ 时,$(a_1+a_2)/2\geq(a_1a_2)^{1/2}$显然成立,而且等号成立当且仅当 $a_1=a_2$.假设 $n=k$ 时,有$(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k\geq(\prod_{i=1}^{k}a_i)^{1/k}$而且等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k$.当 $n=k+1$ 时,构造函数 $F(a_{k+1}=((\sum_{i=1}^{k+1}a_i)/(k+1))^{(k+1)}-(\prod_{i=1}^{k+1}a_i)$,则

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}=((\sum_{i=1}^{k+1}a_i)/(k+1))^k-(\prod_{i=1}^{k}a_i).$$

令$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}=0$,得 F 的驻点 $a_{k+1}=-(a_1+\cdots+a_k)+(k+1)\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$.当 $a_{k+1}<-(a_1+\cdots+a_k)+(k+1)\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$时,$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}<0$;而当 $a_{k+1}=-(a_1+\cdots+a_k)+(k+1)\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$时,$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}>0$.因此,$F$ 在 $a_{k+1}=-(a_1+\cdots+a_k)+(k+1)\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$取得唯一最小值,该唯一最小值为 $ka_1a_2\cdots a_k((a_1+\cdots+a_k)/k-\sqrt[k]{a_1\cdots a_k})$.由假设$(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k\geq(\prod_{i=1}^{k}a_i)^{1/k}$,所以 F 的最小值大于或等于0.从而,F

收稿日期　2000-12-15　　作者简介　宋海洲(1971-),男,讲师

≥ 0, 即$(\sum_{i=1}^{k+1}a_i)/(k+1)\geq(\prod_{i=1}^{k+1}a_i)^{1/(k+1)}$成立. 又$F$的最小值要等于0, 当且仅当$((a_1+\cdots+a_k)/k-\sqrt[k]{a_1\cdots a_k})=0$; 而$((a_1+\cdots+a_k)/k-\sqrt[k]{a_1\cdots a_k})=0$, 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_k$成立. 这时, 驻点$a_{k+1}=a_1=a_2=\cdots=a_k$. 从而,

$$((\sum_{i=1}^{k+1}a_i)/(k+1))^{(k+1)}=(\prod_{i=1}^{k+1}a_i),$$

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$成立. 因此, $(\sum_{i=1}^{n}a_i)/n\geq(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{1/n}$对一切自然数$n$成立. 而且等号成立, 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$.

(2) 当$n=1$时, $a_1/1\leq(a_1^r/1)^{1/r}$显然成立. 假设$n=k$时, 有$(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k\leq(\sum_{i=1}^{k}a_i^r/k)^{1/r}$而且等号成立, 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_k$. 当$n=k+1$时, 构造函数$F(a_{k+1})=(\sum_{i=1}^{k+1}a_i^r/(k+1))-((\sum_{i=1}^{k+1}a_i)/(k+1))^r$, 则

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}=(r/(k+1))a_{k+1}^{r-1}-(r(a_1+\cdots+a_{k+1})^{(r-1)}/(k+1)^r).$$

令$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}=0$, 得$F$的驻点$a_{k+1}=(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k$. 当$a_{k+1}<(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k$时, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}<0$; 而当$a_{k+1}>(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k$时, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_{k+1}}>0$. 所以, F在$a_{k+1}=(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k$处取得最小值, 最小值为$(k/(k+1))((\sum_{i=1}^{k}a_i^r)/k)-((\sum_{i=1}^{k}a_i)/k)^r)$. 由假设$(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k\leq(\sum_{i=1}^{k}a_i^r/k)^{1/r}$, 故$F$的最小值大于或等于0, 从而$F\geq 0$. 而$F$的最小值要等于0, 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_k$成立. 这时最小值在$a_{k+1}=(\sum_{i=1}^{k}a_i)/k=a_1=a_2=\cdots=a_k$处取得. 即有

$$(\sum_{i=1}^{k+1}a_i)/(k+1)\leq(\sum_{i=1}^{k+1}a_i^r/(k+1))^{1/r},$$

而且等号成立, 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$. 因此

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)/n\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^r/n)^{1/r}$$

对一切自然数n成立, 而且等号成立, 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$.

2 均值不等式文献[1]证法3的修正

Lagrange 证法[3]. 设

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-b=0, f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1a_2\cdots a_n=A.$$

作 Lagrange 辅助函数为

$$\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n,\lambda)=a_1a_2\cdots a_n+\lambda(\sum_{i=1}^{n}a_i-b). \tag{2}$$

令$\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0$, 解得$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{b}{n}$, 从而

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1a_2\cdots a_n$$

有唯一可能的极值点$(\frac{b}{n},\frac{b}{n},\cdots,\frac{b}{n})$. 又$f$在有界闭区域$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid\sum_{i=1}^{n}a_i-b=0, a_1\geq 0, a_2$

$\geq 0, \cdots, a_n \geq 0\}$ 上连续, 故 f 在有界闭区域 $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i - b = 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \cdots, a_n \geq 0\}$ 取得最大、最小值. 又 f 在该有界闭区间边界上的值为 $0(n \geq 2$ 时$)$, 故 f 在 $\left(\frac{b}{n}, \frac{b}{n}, \cdots, \frac{b}{n}\right)$ 取得最大值为 $\left(\frac{b}{n}\right)^n$. 于是有 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{b}{n}$, 即 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) / n \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$.

注　文献〔〕在说明 f 在 $\left(\frac{b}{n}, \frac{b}{n}, \cdots, \frac{b}{n}\right)$ 取得最大值的原因时, 计算得 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_i^2} = -\frac{A}{a_i^2}$ 及 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_i \partial a_j} = 0$, 从而得出 $d^2 \varphi < 0$. 但该计算是错误的, 实际上 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_i^2} = 0$, 而 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{A}{a_i a_j} (i \neq j)$, 从而无法得出 $d^2 \varphi < 0$.

3　r 阶平均值

调和、几何和算术平均值, 仅仅是下面将要定义的更一般的平均值的特殊情形 .

定义 1　对于正数列 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, 正权数 $p = (p_1, \cdots, p_n)$ 和广义实数 r, r 阶加权平均值定义为

$$M_n^{(r)}(a, p) \overset{\Delta}{=} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^r}{P_n}\right)^{1/r} \quad (r \neq 0, |r| < +\infty), \tag{3a}$$

$$M_n^{(r)}(a, p) \overset{\Delta}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{P_i}\right)^{1/P_n} \quad (r = 0), \tag{3b}$$

$$M_n^{(r)}(a, p) \overset{\Delta}{=} \min(a_1, \cdots, a_n) \quad (r = -\infty), \tag{3c}$$

$$M_n^{(r)}(a, p) \overset{\Delta}{=} \max(a_1, \cdots, a_n) \quad (r = +\infty). \tag{3d}$$

其中 $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$. 当 $r = -1$ 时, 得到加权调和平均值; 当 $r = 0$ 时, 得到加权几何平均值; 当 $r = 1$ 时, 得到加权算术平均值 .

定理 2　$M_n^{(r)}(a, p)$ 是 r 的连续函数 . 当 $p_1 = \cdots = p_n = 1$ 时, $M_n^{(r)}(a, p)$ 就变为下述定义 2.

定义 2　设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 是正数的有限数列, r 是广义实数, 则 r 阶平均值定义为

$$M_n^{(r)}(a) \overset{\Delta}{=} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^r}{n}\right)^{1/r} \quad (r \neq 0, |r| < +\infty), \tag{4a}$$

$$M_n^{(r)}(a) \overset{\Delta}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \quad (r = 0), \tag{4b}$$

$$M_n^{(r)}(a) \overset{\Delta}{=} \min(a_1, \cdots, a_n) \quad (r = -\infty), \tag{4c}$$

$$M_n^{(r)}(a) \overset{\Delta}{=} \max(a_1, \cdots, a_n) \quad (r = +\infty). \tag{4d}$$

当 $r = -1$ 时, 得到调和平均值, 当 $r = 0$ 时, 得到几何平均值; 当 $r = 1$ 时, 则可以得到加权算术平均值.

4　平均值的不等式推广形式和其证明

定理 1 的结论是 $M_n^{(-1)}(a) \leq M_n^{(0)}(a) \leq M_n^{(1)}(a)$. 实际上, 我们有更为一般的结论 .

定理3 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_0$, 则 $M_n^{(r)}(a,p) = a_0$. 否则, $M_n^{(r)}(a,p)$ 是关于 r 的严格递增函数, 即对于 $-\infty \leq s < t \leq +\infty$ 有

$$M_n^{(s)}(a,p) < M_n^{(t)}(a,p). \tag{5}$$

证明 定义函数为 $f(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t / P_n\right)$ 和

$$F(t) = t^2 \frac{f'(t)}{f(t)} = t^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{t}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t / P_n\right)\right] = t\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t \ln a_i / \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t - \left[\ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t / P_n\right)\right].$$

$$F(t) = \frac{t}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t\right)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t \ln^2 a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t \ln a_i\right)^2\right].$$

由柯西不等式, 可知 $F'(t)$ 与 t 同号. 即 $t < 0$ 时, $F'(t) < 0$; $t > 0$ 时, $F'(t) > 0$, 而 $F'(t) = 0$. 所以, F 在 $t = 0$ 处具有唯一最小值. 因此, $t \neq 0$ 时, 有 $F(t) > F(0) = 0$, 而 $f'(t)$ 与 $F(t)$ 同号. 从而, 对 $t \neq 0$ 时有 $f'(t) > 0$, 故 $f(t)$ 在 $[+\infty, +\infty]$ 上严格单调递增. 即对 $-\infty \leq s < t \leq +\infty$, 有

$$M_n^{(s)}(a,p) < M_n^{(t)}(a,p).$$

推论 若 $a_1 = a_2 = \cdots a_n = a_0$, 则 $M_n^{(r)}(a) = a_0$. 否则, $M_n^{(r)}(a)$ 是关于 r 的严格递增函数. 即对于 $-\infty \leq s < t \leq +\infty$, 有

$$M_n^{(s)}(a) < M_n^{(t)}(a). \tag{6}$$

在式(6)中, 取 $r = -\infty, -1, 0, 1, +\infty$ 或 $r \geq 1$ 及 $t > r$ 时, 可得常见的平均值不等式为

$$\min(a_1, \cdots, a_n) \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^r}{n}\right)^{1/r} (r \geq 1) \leq$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^t}{n}\right)^{1/t} (t > r) \leq \max(a_1, \cdots, a_n).$$

参 考 文 献

1 邱秀环. 两个重要不等式的证明方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2000, 21(4): 354～356

2 中国矿业学院数学教研室编. 数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 1980. 4～5

3 华东师范大学数学系编. 数学分析: 下册[M]. 上海: 高等教育出版社, 1988. 257～263

Inequality of Average Value and Its Proof

Song Haizhou

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A method of proof using only unary function and first-order derivative is given to two inequalities of average value, and an unified proof is given to a more general equality of average.

Keywords average value, equality, first-order derivative