第 22 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.22　No.2
2001 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr.2001

文章编号　1000-5013(2001)02-217-04

粗集理论中的相容关系

祝　峰

(西北工业大学计算机系, 西安 710072)

摘要　粗集通常是由等价关系来定义的, 相容关系是对标准粗集理论拓广的一种方法. 文中主要讨论相容关系的计数问题和代数结构问题.

关键词　粗集, 关系, 相容关系, 格, 布尔代数

中图分类号　O 153.2: TP 301.6　　　　文献标识码　A

粗集理论是由于分类、概念形成、数据分析中, 处理不完全和不充分信息的实际需要而产生的, 它为研究事物不可分辨性提供了系统的方法. 通常, 不可分辨性是利用等价关系来描述的. 当领域中的事物由一组属性来描述时, 我们可以基于属性值来定义事物的不可分辨性. 当两个事物在某些属性上值相同时, 也即具有相同的描述时, 我们说它们是不可分辨的. 相同描述的事物构成等价类, 这些等价类构成了论域的一个剖分. 这样论域中的任一个子集, 都可以用两个等价类来逼近. 这两个等价类是上下近似集[1], 它们可以用一对集合论算子来描述[2]. 利用更广的条件, 我们可以拓广粗集概念本身, 如采用非等价关系, 论域的覆盖. 这样也可以产生各种各样的近似运算. 如文献[3,4]使用覆盖来研究粗集理论, 文献[1,4,5]用关系和代数的方法研究粗集理论, 文献[2]用拓扑方法研究粗集理论, 文献[6,7,8]用拓扑布尔代数方法研究粗集理论. 正是由于标准粗集理论是基于等价关系的, 而等价关系又来源于信息系统中的属性. 实际上粗集理论中的等价关系是基于属性值相等这个基础之上的. 为了突破这一限制, 许多研究人员对原先的粗集理论模型作了有意义的拓广[1,3,4,5]. 相容关系是这方面的一个重要尝试[9~12]. 本文将从组合与代数的角度深入探讨相容关系的主要性质.

1　相容关系的基本概念与计数

定义 1　$U\times U$ 的一个子集称为 U 上的一个二元关系, 简称 U 上的关系.

定义 2　U 上的一个关系如果满足自反性和对称性, 则称 R 是 U 上的一个相容关系.

相容关系的关系矩阵的特点是其主对角线元均为 1, 而且是对称的.

定理 1　设 U 是 n 元集, 记 P_n 是 U 上所有相容关系的个数, 则 $P_n=2^{\frac{n^2-n}{2}}$.

收稿日期　2000-10-21　　作者简介　祝　峰(1962-), 男, 副教授

基金项目　国家教育部博士点基金资助项目; 陕西省自然科学基金资助项目

证明　定理 1 的证明, 可以采用两种方法.

(1) 方法 1. 设 $U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $U_{n-1}=\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$. 于是, U_{n-1}上所有相容关系的个数是 P_{n-1}. 下面我们将 U 上的相容关系 R 进行分类.

0 类: x_n 只和自己有关系. 这类关系必定具有这样的形式, 即

$$R = \{x_n, x_n\} \cup R';$$

其中 R 是 U_{n-1}. 于是, 这种关系共有 P_{n-1}个.

1 类: x_n 除和自己有关系外, 还与 U_{n-1}中的一个元有关系. 这类关系必定具有这样的形式, 即

$$R = \{x_n, x_n\} \cup \{x_n, x_i\} \cup \{x_i, x_n\} \cup R';$$

其中 $1 \leq i \leq n-1$, R 是 U_{n-1}上的相容关系. 于是这种关系共有 $C_{n-1}^{1} P_{n-1}$个. 以此类推.

i 类($1 \leq i \leq n-1$): x_n 除和自己有关系外, 还与 U_{n-1}中的 i 个元有关系, 这类关系共有 $C_{n-1}^{i} P_{n-1}$个. 于是, 有

$$P_n = P_{n-1} + C_{n-1}^{1} P_{n-1} + C_{n-1}^{2} P_{n-1} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} P_{n-1} = 2^{n-1} P_{n-1}.$$

最后得 $P_n = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$.

1	×	×	×	×
	1	×	×	×
		1	×	×
			…	×
				1

图 1　关系矩阵

(1) 方法 2. 利用关系矩阵, 如图 1 所示. 由于相容关系是自反的, 矩阵的主对角线都为 1. 又由于相容关系是对称的, 矩阵关于主对角线对称. 因此我们只要确定矩阵主对角线的下三角部分, 就可以确定整个矩阵. 矩阵的下三角部分的任一空可以任取 0 或 1. 矩阵主对角线的下三角部分共有$\frac{n^2-n}{2}$个空, 故有 $2^{\frac{n^2-n}{2}}$个相容关系. 证毕.

2　相容关系的代数结构

我们记恒等关系 ϵ 为 $\forall u, v \in U$, $u \epsilon v$ 当且仅当 $u=v$. 记全总关系为 δ∶$\forall u, v \in U$, 都有 $u \delta v$. 故 ϵ 为最小的相容关系, 即对任一相容关系 R, 有 $\epsilon \subseteq R$. δ 为最大的相容关系, 即对任一相容关系 R, 有 $\delta \supseteq R$.

引理 1　设 U 是集合, R_1 和 R_2 是 U 上的关系, 则 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

引理 2　设 U 是集合, R_1 和 R_2 是 U 上的关系, 则 $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

引理 3　设 U 是集合, R 是 U 上的关系, 下面命题成立, 即

(1) R 是自反的 $\Leftrightarrow \epsilon \subseteq R$. (2) R 是对称的 $\Leftrightarrow R^{-1} = R$.

引理 4　设 U 是集合, R_1 和 R_2 是 U 上的关系, 下面命题成立, 即

(1) 若 R_1, R_2 是自反的, 则 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ 也是自反的. (2) 若 R_1, R_2 是对称的, 则 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ 也是对称的.

综合上述, 于是我们有

定理 2　设 R_1 和 R_2 是非空集合 U 上的两个相容关系, 则 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $(R_1 - R_2) \cup \epsilon$ 也是相容关系.

记 $TR(U)$ 为 U 上所有相容关系的集合.

定理 3　U 上所有相容关系在 $\cap$ 运算下构成可换的独异点, 单位元为 δ. 且 ϵ 是其零元.

定义 3　此为相容闭包. 设 R 是非空集合 U 上的关系, R 的相容闭包 R' 是 U 上的关系, 使得满足 3 个条件. (1) R' 是相容关系. (2) $R \subseteq R'$. (3) 对于 U 中任何包含 R 的相容关系 R'', 有 $R' \subseteq R''$.

由上面的定义, 如果关系 R 有相容闭包的话, 它一定是唯一的.

例 1　此为相容闭包. 设 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $R = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_5)\}$, 则 $R' = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_2) (x_3, x_3), (x_3, x_4) (x_4, x_3), (x_4, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_5), (x_6, x_6)\}$.

定理 4　设 R 是非空集合 U 上的关系, 则 R 的相容闭包为 $\epsilon \cup R \cup R^{-1}$.

证明　记 $\epsilon \cup R \cup R^{-1}$ 为 R', R' 是自反、对称的. 因此, R' 是相容关系. $R \subseteq R'$ 是明显的. 若有 U 上的相容关系 R'', 使得 $R \subseteq R''$. 由 R'' 是自反的, $\epsilon \subseteq R''$. 由 R'' 是对称的和 $R \subseteq R''$, 有 $R^{-1} \subseteq R''$. 于是, $\epsilon \cup R \cup R^{-1} \subseteq R''$. 故 $R' \subseteq R''$. 证毕.

定理 5　U 上所有相容关系在运算 $\cup$ 下构成可换的独异点, 单位元为 ϵ. 且 δ 是其零元对于任一个非空有限集合 U, 或称为论域, U 上的所有相容关系构成的有限集合 $TR(U)$ 在关系的大小偏序 $\subseteq$ 下, 它有最小元 ϵ, 最大元 δ. 且对于任给 $R_1, R_2 \in TR(U)$, $R_1 \cap R_2$ 是 $\{R_1, R_2\}$ 的最大下界, $R_1 \cup R_2$ 是 $\{R_1, R_2\}$ 的最小上界. 于是有:

定理 6　对于一个非空有限的论域 U, U 上所有相容关系的集合 $TR(U)$ 对于关系的偏序构成一个有界格.

任给 $R \in TR(U)$, 由引理 3, $(\delta - R) \cup \epsilon$ 是一个相容关系. 而 $[(\delta - R) \cup \epsilon] \cup R = \delta$, $[(\delta - R) \cup \epsilon] \cap R = \epsilon$. 因此 $(\delta - R) \cup \epsilon$ 是 R 的补.

定理 7　对于一个非空有限的论域 U, U 上所有相容关系的集合 $TR(U)$ 对于关系的偏序构成一个有界有补格.

定理 8　对于一个非空有限的论域 U, U 上所有相容关系的集合 $TR(U)$ 对于关系的偏序构成一个布尔代数.

证明　由于相容关系的交并运算就是普通的集合交并运算. 因此它们自然有相互的分配律. 由定理即可得 $TR(U)$ 是一个布尔代数

注　U 上所有关系的集合 $REL(U)$ 也构成一个布尔代数, 但 $TR(U)$ 不是它的子布尔代数, 因为前者的最小元是空关系, 而后者的最小元是恒等关系. 对于 $R \in TR(U)$, R 在 $TR(U)$ 中的补为 $(\delta - R) \cup \epsilon$, 而在 $REL(U)$ 中的补却是 $\delta - R$. 不过, $TR(U)$ 是 $REL(U)$ 的子格.

3　结束语

相容关系是拓广粗集理论的重要工具, 研究相容关系的代数性质将有助于建立更广义的粗集理论, 也为粗集理论更好的应用提供了理论基础.

参　考　文　献

1　Yao Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators [J]. Information Sciences, 1998, (111): 239～259

2　Lin T Y, Liu Q. Rough approximate operators: axiomatic rough set theory[A]. In: Ziarko W P, eds.

Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery[C]. London: Springer-Verlag, 1994. 256～260
3 Bonikowski Z, Bryniarski E, Wybraniec-Skardowska U. Extensions and intentions in the rough set theory [J]. J. Information Sciences, 1998, (107): 149～167
4 Bonikowski Z. Algebraic structures of rough sets[A]. In: Ziarko W P, eds. Rough Sets, Fuzz Sets and Knowledge Discovery[C]. London: Springer-Verlag, 1994. 243～247
5 Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, (109): 21～47
6 Chunchro M. On rough sets in topological Boolean algebras[A]. In: Ziarko W P, eds. Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery[C], London: Springer-Verlag, 1994. 157～160
7 祝 峰, 何华灿. 粗集的公理化[J]. 计算机学报, 2000, 23(3): 330～333
8 祝 峰, 何华灿. 粗集中上下近似运算的逻辑性质[J]. 计算机科学, 2000, 27(11): 79～81
9 Polkowski L, Skowron A, Zytkom J. Tolerance based rough sets[A]. In: Lin T Y, et al., eds. Soft Computing: Rough Sets, Fuzzy Logic Networks, Uncertainty Management, Koowledge Discovery[C]. San Diego: Simulation Councils Inc., 1995. 55～58
10 Yao Y Y, Wong S K M. Generalization of rough sets using relationships between attribute values[A]. In: Wang P P, eds. Proceedings of the Second Annual Joint Conference on Information Sciences[C]. Carolina: Wrightsville Beach N., 1995. 30～33
11 Slowinski R, Vanderpooten D. Similarity relation as a basis for rough approximations[A]. In: Wang P P, eds. Proceedings of the Second Annual Joint Conference on Information Sciences[C]. Carolina: Wrightsville Beach N., 1995. 249～250
12 Skowron A, Stepaniuk J. Tolerance approximation spaces[J]. Fundamenta Informatiocae, 1996, 27(2-3): 245～253

Consistency Relation in the Theory of Rough Sets

Zhu Feng

(Dept. of Comput. Sci., Northwestern Polytechnical Univ., 710072, Xi'an)

Abstract Rough sets are generally defined by an equivalent relation, while consistency relations is a method with which the theory of standard rough sets can be genearalized. The author principally discusses here the computation and the algebraic structure of consistency relations.

Keywords rough set, relation, consistency relation, lattice, Boolean algebra