第22卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.22 No.2
2001年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2001

文章编号 1000-5013(2001)02-137-02

同样指数集的更小本原矩阵类证明

赵 克 文

(琼州大学数学系, 通什 572200)

摘要 李毓祁在《数学学报》上得到对角元非零至少有一对非零对称元, 但非对称的 n 阶本原短阵的指数集 $E_n^+ = \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$. 对此, 文中给出其中一更小类本原短阵已有此指数集, 且证明更简洁又不引用任何结果. 另外, 文中还给出一著名定理的简短证明.

关键词 本原矩阵, 指数集, 通道

中图分类号 O 151.21 文献标识码 A

一个 n 阶非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为本原的, 如果存在自然数 k, 使 $\boldsymbol{A}^k > 0$(即 $\boldsymbol{A}^k$ 的每一元均是正数). 且若 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 有元素为0), 则称 k 为 $\boldsymbol{A}$ 的(本原)指数, 记为 $\gamma(\boldsymbol{A}) = k$. 这里, 数的运算为 $a + b = \max\{a, b\}$, $a \cdot b = \min\{a, b\}$.

显然, 把非负短阵 $\boldsymbol{A}$ 的正元都换成1, 得到的(0, 1)短阵 $\boldsymbol{A}'$, 易知 $\gamma(\boldsymbol{A}) = \gamma(\boldsymbol{A}')$. 所以, 本文只研究(0, 1)矩阵的本原性就足够.

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 可构造出一个 n 点(阶)有向图 $D(\boldsymbol{A})$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的 (i, j) 位置无为1, 则从点 i 至 j 连一条方向指向 j 的边(若 $i = j$, 则在 i 画环); 若 $\boldsymbol{A}$ 的 (i, j) 位置的元为0, 则无 i 指向 j 的边. 此有向图记为 $D(\boldsymbol{A})$. 反之, 一有向图 D, 也对应一矩阵 $\boldsymbol{A}(D)$. 显然, 上面得到的全体 n 阶有向图和全体 n 阶矩阵一一对应.

一个 n 阶有向图 D, 称为本原的. 若存在自然数 k, 对任意自然数 $m \geq k$, D 的任意两点 i, j 均有从 i 至 j 的边长为 m 的通道(通道允许经过一点或一边多次). 且若存在两点 u, v 没有从 u 到 v 的边长为 $k-1$ 的通道, 则称有向图 D 的(本原)指数为 k, 记为 $\gamma(D) = k$.

有一个熟知的结果是 $\gamma(\boldsymbol{A}) = \gamma(D\ \boldsymbol{A}))$, D 是本原的当且仅当 D 是强连通(即任两点均有两条反向通道), 且有奇圈(环看做长为1的奇圈).

一个有向图 D 的两点 i, j, 若存在自然数 k, 且对任意自然数 $m \geq k$, 均有从 i 至 j 的边长为 m 的通道, 而没有边长 $k-1$ 的通道, 则称 k 为从 i 至 j 的局部本原指数, 记为 $\gamma(i, j) = k$. 显然, n 阶有向图 D, 有 $\gamma(D) = \max\gamma(i, j)$. 上式中 $1 \leq i, j \leq n$.

下面的结果是显然的. 有向图 D 从 i 至 j 的边长为 m 的通道经过环点, 则 $\gamma(i, j) \leq m$.

现给出 Varge [1] 所著《矩阵迭代分析》一书中著名定理的简短证明.

定理1 d 个正对角元的 n 阶本原矩阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\gamma(\boldsymbol{A}) \leq 2n - d - 1$.

收稿日期 2000-06-22 作者简介 赵克文(1970-), 男, 讲师

证明 考虑 $D(A)$, 因 $D(A)$ 有 d 个环点且为强连通, 记局部指数最大的为 $\gamma(i_1, j_1)$. 让 $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{h-1} \to i_h \to i_{h+1} \to \cdots \to j_1$ 是经环点且最短的通道, 认为 i_h 是最先到达的环点. 因通道最短, 所以 $i_s(s=1, 2, \cdots, h-1)$ 是两两不相同点. 即有 $h-1 \leq n-d$, $\{i_h, i_{h+1}, \cdots, j_1\}$ 也是两两不同的点. 从而, $|\{i_h, i_{h+1}, \cdots, j_1\}| \leq n$ 因此有 $\gamma(i_1, j_1) \leq 2n-d-1$.

记 E_n^i 为恰有 i 个正对角元, 并至少有一对非零对称元且非对称本原短阵指数集. 文[2]有 $E_n^+ = \sum \cup E_n^i = \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$.

由定理1及有非对称元知 $E_n^+ \subseteq \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$. 此时, 若 $E_n^1 = \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$, 则不仅证明了文[2]的结果, 且得到更精确的认识.

现在, 我们证其中一类 E_n^1 就有此指数集. 且本文的证明更简洁且不引用任何结果.

定理**2** $E_n^1 = \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$.

证明 因有非对称元, 所以 $1 \in E_n^1$. 又有定理1, 所以 $E_n^1 \subseteq \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$.

考察图1, 显然 $\gamma(D) = \gamma(A(D)) = k(3 \leq k \leq n)$. 当 $k=2$ 时, 从点1至点 n 连一条有向边, 就是非对称图. 因此, 图1的本原矩阵为非对称, 且指数为2. 可见, $\{2, 3, \cdots, 2n-2\} \subseteq E_n^1$.

再考察图2, 显然知 $\gamma(D) = \gamma(\upsilon, \upsilon_n) = 2n-l \geq \max(\upsilon, \upsilon)$, 式中 $2 \leq l < n$, $1 \leq i, j \leq n$. 因此, 可得 $\{n+1, n+2, \cdots, 2n-2\} \subseteq E_n^1$, 从而有 $E_n^1 = \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$.

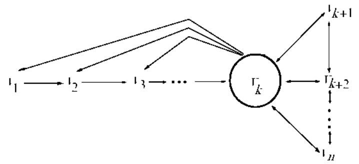

图1 dg_1 图

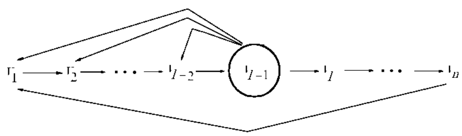

图2 dg_2 图

参 考 文 献

1 Varge R S 著. 矩阵迭代分析[M]. 周建平译. 上海: 上海科技出版社, 1962. 6～365

2 李毓祁. 一个本原矩阵类的指数集的完全刻划[J]. 数学学报, 1996, (5): 637～642

A Simple Proof that a Still More Small Class of Primitive Matricas Have the Same Exponent Set

Zhao Kewan

(Dept. of Math., Qiongzhou Univ., 572200, Tongshi)

Abstract Li Yuqi had obtained exponent set $E_n^+ = \{2, 3, \cdots, 2n-2\}$ of non-symmetrical n order primitive matrices, of which diagonal element has at teast a pair of nonzero symmetric elements. Without the citation of any result, the authors more succintly prove that a still more small class of these prcmitive matrices have this exponent set already. Besides, a brief proof is given to a famous theorem.

Keywords primitive matrix, exponent set, channel