第 22 卷　第 2 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 22　No. 2
2001 年 4 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Apr. 2001

文章编号　1000-5013(2001)02-133-04

唯一极值映照为正则 Teichmüller 映照的充要条件

刘　金　雄

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要　设 f 为单位圆 $D=\{|z|<1\}$ 到自身, 且与 f 有相同边界值的拟共形映照类 Q_f 中的唯一极值拟共形映照, f 的最大特征 $K>1$. 那么, f 为正则 Teichmüller 映照的一个充分必要条件是存在一列 Jordan 曲线 γ_n. γ_n 的内部为 D_n, $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=D$, 且 $f|_{\gamma_n}$ 无本质边界点, $n=1,2,\cdots$. 即 γ_n 上的每一点关于 $f|_{\gamma_n}$ 的点特征, 都小于从 G_n 到 $f(G_n)$ 以 $f|_{\gamma_n}$ 为边界值的极值拟共形映照的最大特征.

关键词　极值拟共形映照, Teichmüller 映照, 本质边界点, 边界特征
中图分类号　O 174.55　　文献标识码　A

1　问题的提出

设 f 为单位圆 $D=\{|z|<1\}$ 到自身的一个拟共形映照, Γ 为 ∂D 上不少于 4 点的闭集, 而 $Q(f,D,\Gamma)$ 表示从 D 到 $f(D)$ 且在 Γ 上与 f 有相同的值的拟共形映照的全体所成的类. 对于任一 $g\in Q(f,D,\Gamma)$, 置

$$\kappa_g(z)=g_{\bar z}/g_z,\qquad \|\kappa_g\|_\infty=\operatorname{ess}\sup_{z\in D}|\kappa_g(z)|.\tag{1}$$

由正规性, 至少存在一个 $f^*_\Gamma\in Q(f,D,\Gamma)$, 使得

$$k^*_\Gamma=\|\kappa_{f^*_\Gamma}\|_\infty=\inf_{g\in Q(f,D,\Gamma)}\|\kappa_g\|_\infty.\tag{2}$$

我们记

$$K^*_\Gamma=(1+k^*_\Gamma)/(1-k^*_\Gamma).\tag{3}$$

这样的映照 f^*_Γ 称为 $Q(f,D,\Gamma)$ 中的极值映照. 而假如这样的 f^*_Γ 是唯一的, 则称 f^*_Γ 为 $Q(f,D,\Gamma)$ 中的唯一极值映照. 当 $\Gamma=\partial D$ 的情形, 我们记 $Q_f=Q(f,D,\Gamma)$, 以及

$$f^*=f^*_{\partial D},k^*=k^*_{\partial D},K^*=K^*_{\partial D}.\tag{4}$$

显然, $K^*_\Gamma\le K^*$. 对于 $\zeta\in\partial D$, 置

$$K^*_\zeta=\inf K^*_\Gamma,\tag{5}$$

其中 Γ 取自 ∂D 上的所有以 ζ 为内点的弧. 称 K^*_ζ 为在点 ζ 上 $f|_{\partial D}$ 的特征. 显然, $K^*_\zeta\le K^*$. 若 $K^*_\zeta=K^*$, 则称 ζ 为 $f|_{\partial D}$ 的一个本质边界点[] 或 $f|_{\partial D}$ 有本质边界点 ζ 当 D 为边界不少于 4

收稿日期　2000-10-26　　作者简介　刘金雄(1968-), 男, 讲师

点的单连通区域的情形,可类似地定义本质边界点.

定理**A**[1] 设$f(z)$为D到D的拟共形映照,$\zeta\in\partial D$.那么,f为极值拟共形映照且ζ为本质边界点,其充分必要条件是存在D内一全纯函数列$\{\Phi_n\}$,满足下面的式(6)~(8).即

$$\|\Phi_n\| = \iint_D |\Phi_n| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le 1, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(z) = 0, \text{ 在 } \bar{D}\setminus\{\zeta\} \text{ 的任一闭子集上一致}, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_D \kappa_f(z)\,\Phi_n \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|\kappa_f\|_\infty = k. \tag{8}$$

设h为Jordan曲线γ到Jordan曲线γ'的保向同胚,且h能拓广为γ的一个内部领域到γ'的一个内部邻域的一个拟共形映照$\tilde{h}$.所有$\tilde{h}$的最大特征$\tilde{H}$的下确界H,称为边界同胚h的特征.若f的复特征具有形式

$$\kappa_f = f_{\bar{z}}/f_z = k\overline{\varphi_0}/|\varphi_0|, \; a.e., \; z \in D, \tag{9}$$

其中k为常数,$0\le k<1$,φ_0在D中全纯,则称f为关于φ_0的正则Teichmüller映照.

定理**B**[2] 设f为最大特征$K>1$,且为Q_f中的唯一极值映照.若存在一列Jordan曲线γ_n,γ_n的内部区域为G_n,$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n = D$,且对任何$n$,边界同胚$f|_{\gamma_n}$的特征$H_n<K$,则$f$是正则Teichmüller映照.

本文利用本质边界点的概念,给出了唯一极值映照为正则Teichmüller映照的一个充分必要条件.我们的结果:

定理**1** 设f为最大特征$K>1$,且Q_f中的唯一极值映照.那么,f为正则Teichmüller映照的一个充分必要条件:存在一列Jordan曲线γ_n,γ_n的内部为G_n,$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n = D$,且$f|_{\gamma_n}$无本质边界点,$n=1,2,\cdots$.即$\gamma_n$上的每一点关于$f|_{\gamma_n}$的点特征,都小于从$G_n$到$f(G_n)$以$f|_{\gamma_n}$为边界值的极值拟共形映照的最大特征.

定理1的结果有点怪.因为一个属于Reich的例子[1]说明了有唯一极值正则Teichmüller映照f,其伴随二次微分范数有限,但$f|_{\gamma_n}$仍有本质边界点.本质边界点还有另一种等价定义,详见文[2,3].作为定理1的一个应用,我们证明了下面的定理2.

定理**2** 设f为Q_f中的唯一极值映照.若$\kappa_f(z) = k\overline{\varphi}/|\varphi|$,其中$k$为常数,$0\le k<1$,$\varphi$在某圆环$D_r = \{r<|z|<1\}$内连续且其零点是孤立的.那么,$f$必为正则Teichmüller映照.

在定理2的假设下,我们可对Reich在[3]中提出的一个问题,作出肯定的回答.

2 定理1的证明

D上满足式(6)和式(8)的全纯函数列$\{\Phi_n\}$,我们称之为关于$\kappa_f(z)$的一个Hamilton序列.若$\kappa_f(z)$的Hamilton序列$\{\Phi_n\}$内闭一致收敛于零,则称$\{\Phi_n\}$为退化的Hamilton序列.为了充分性的证明,我们需要引述下面的Fehlmam和Sakan的结果.

引理**1**[3] 设W为$f|_{\partial D}$的所有本质边界点的集合,f为Q_f的极值拟共形映照,$\{\Phi_n\}$是关于$\kappa_f(z) = f_{\bar{z}}/f_z$的一个退化的Hamilton序列.那么,对每一关于$\bar{D}$的相对开集U,$W\subset U$,有

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D\setminus U}|\Phi_n|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

文[3]中指出, 当 W 为空集时, 关于 κ_f 任一 Hamilton 序列必非退化. 这样, f 便是一个正则 Teichmüller 映照, 其伴随二次微分范数为 1. 由于本质边界点是共形不变量, 故当 D 为 Jordan 区域时, 引理 1 仍成立.

由充分性的假设条件, 对固定的 n, $f|_{\gamma_n}$ 无本质边界点. 引理 1 告诉我们, 从 G_n 到 $f(G_n)$ 以 $f|_{\gamma_n}$ 为边界值的极值拟共形映照 f_n 是唯一的正则 Teichmüller 映照, 其伴随二次微分 φ_n 在 G_n 中全纯, 范数 $\|\varphi_n\| < \infty$. 但是, f 为 Q_f 中的唯一极值映照, 必有 $f|_{G_n} = f_n$. 若不然, 我们可定义 $f^*(z)$, 当 $z \in D \setminus G_n$, $f^*(z) = f(z)$; 当 $z \in G_n$, $f^*(z) = f_n(z)$. 显然 $f^*|_{\partial D} = f|_{\partial D}$, 且 $f^*(z)$ 为极值拟共形映照. 这与 f 的唯一极值性相矛盾. 这样, 我们便证明了在每个 G_n 中, f 是一个其伴随二次微分的范数为有限的正则 Teichmüller 映照. 因此, f 为一个正则 Teichmüller 映照, 其伴随二次微分 φ 的范数可以为无限. 充分性得证.

必要性的证明需用到 Harrington 和 Ortel 的结果.

引理 **2**[4]　全纯函数列 $\{\Phi_n\}$ 满足式(6), 且内闭一致收敛于零. 若 $\kappa_f(z)$ 在 D 上有界可测, 在 $r_0 \le |z| < 1$ 上连续, 则

$$\lim_{n\to\infty}\iint_D \kappa(z)\Phi_n(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

此结论表明, 若极值映照 f 的复特征 $\kappa_f(z)$ 在某圆环 $r_0 \le |z| < 1$ 上连续, 则其任一 Hamilton 序列必非退化或 f 为共形映照.

由必要性的假设条件, f 是一个正则 Teichmüller 映照, $\kappa_f = k\bar{\varphi}/|\varphi|$, 其伴随二次微分 φ 在 D 中全纯. 因此, φ 的零点在任何固定的圆 $\{|z| < r\}$ $(r < 1)$ 内至多只有有限个. 我们可将 φ 的零点按其模的大小排列为 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$, 即 φ 的零点只位于集 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{|z| = t_n\}$ 中, 在 $D\setminus E$ 中无 φ 的零点. 在区间 (t_{i-1}, t_i) 内任意插入两点 r_i', r_i, $(r_i' < r_i)$, $i = 1, 2, \cdots$. 作 $C_n = \{|z| = r_n\}$, $G_n = \{|z| < r_n\}$; $r_n \nearrow 1$, $n\to\infty$ (若 $\{t_i\}$ 只包含有有限个点, 其中最大者为 t_N, 则 N 后的 (r_i', r_i) 任意选取). 从而, φ 在 $\{r_n' \le |z| \le r_n\}$ 上无零点. 因此, $\kappa_f = k\bar{\varphi}/|\varphi|$ 在 $\{r_n' \le |z| \le r_n\}$ 上连续. 由于 f 是唯一极值映照, 由充分性的证明过程知, $f|_{G_n}$ 是 G_n 到 $f(G_n)$ 以 $f|_{C_n}$ 为边界值的唯一极值映照, $\kappa_f|_{G_n}$ 是 $f|_{G_n}$ 的复特征. 由引理 2 知, $\kappa_f|_{G_n}$ 的任一 Hamilton 序列必非退化, 而由定理 A, $f|_{G_n}$ 无本质边界点. 必要性获证.

3　定理 1 的应用

我们先来证明定理 2. 若 $k = 0$, 则 f 为共形映照, 定理显然成立. 故只需证明 $k \ne 0$ 的情形. 由必要性的证明过程可以看出, 在那里, 我们只利用了 φ 的连续性和零点的孤立性. 因此必有一列 $\{C_n\}$, $C_n = \{|z| = r_n\}$, $r_n \nearrow 1$, $n\to\infty$, 使得 $f|_{C_n}$ 无本质边界点. 由定理 1, f 是正则 Teichmüller 映照, 即 φ 在 D 内全纯. 定理 2 证毕.

这里, 我们就单位圆的情形引述 Reich 的一个结果. 1981 年, Reich[5] 证明了定理 C.

定理 **C**　设 $D = \{|z| < 1\}$ 到自身的拟共形映照 $f(z)$, 以 $\kappa_f(z) = k\bar{\varphi}/|\varphi|$ 为复特征, 其中 $0 \le k < 1$. k 为常数, $\varphi \ne 0, \infty$, $a.e.$, 且在 D 内可测. 若存在 D 内的全纯函数列 $\{\varphi_n\}$, 满足

$$\|\varphi_n\| = \iint_D |\varphi_n|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z) = \varphi(z),\ a.e.,\tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty}[k\,\|\varphi_n\| - \mathrm{Re}\iint_D \kappa_f(z)\varphi_n(z)\,dx\,dy] = 0.\tag{12}$$

那么,f 为唯一极值映照.

文[5]中, Reich 提出满足定理 C 的 φ是否是全纯的问题. 这是,若我们补充假设 φ满足定理 2 中的条件,则立即可知满足定理 C 的 $f(z)$是正则 Teichmüller 映照,即 φ是全纯的. 文[6]指出,定理 C 中的 $\kappa_f(z) = k\bar{\varphi}/|\varphi|$这一假设条件可以去掉,而相应地只需补充假设 $\|\kappa_n\|_\infty = k$,定理 C 仍是成立的.

定理 3 设 $D = \{|z| < 1\}$到自身的拟共形映照 $f(z)$,以 $\kappa_f(z) = f_{\bar{z}}/f_z$ 为复特征, $\|\kappa_n\|_\infty = k$. 若存在 D 内的全纯函数列$\{\varphi_n\}$满足条件(10),(11)和(12),其中 $\varphi(z)$在某圆环 $D_r = \{r < |z| < 1\}$内连续且只有孤立零点. 那么, $\kappa_f(z) = k\bar{\varphi}/|\varphi|$, φ在 D 内全纯, φ的范数可以是无限的, f 是唯一极值正则 Teichmüller 映照.

参 考 文 献

1 Reich E. On the relation between local and global properties of boundary values for extremal quasiconformal mappings[J]. Annals of Math. Studies, 1974, 79: 391～407

2 Strebel K. On the existence of extremal Teichmüller mappings[J]. J. Analyse Math. 1976, 30: 464～480

3 Fehlman R, Sakan K I. On the set of substantial boundary poinrs for extremal quasiconformal mappings [J]. Complex Variables, 1986, 6: 323～335

4 Harrington A, Ortel M. The dilataion of an extremal quasiconformal mappings[J]. Duke Math. J., 1976 43: 533～544

5 Reich E. On criteria for unique extremality of Teichmüller mappings[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 1981, 6: 289～302

6 刘金雄. Reich 的一个定理的改进及其相关问题[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2000, 21(1): 8～10

Necessary and Sufficient Condition for the Uniquely Extremal Quasiconformal Mapping to be Regular Teichmuller Mapping

Lin Jinxiong

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Let f with maximal dilalation $K > 1$, be uniquely extremal in the class Q_f, where Q_f denotes a class of quasiconformal mappings from unit circle $D = \{|z| < 1\}$ to itself and with the same boundary values as f. Then, f will be regular Teichmüller mapping if and only if, there exists a sequence of Jordan curves γ_n with $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = D$, and with the property that $f|_{\gamma_n}$ has no substantial boundary point for every n.

Keywords extremal quasiconformal mapping, Teichmüller mapping, substantial boundary point, boundary dilatation