第 22 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 22　No. 2
2001 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2001

文章编号　1000-5013(2001)02-117-05

线性微分积分方程的周期解

王　全　义

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要　首先巧妙地给出一个线性积分方程和线性微分积分方程, 即具有无限多个周期解的两个有趣的反例, 用以说明 Burton 的某些结果是不成立的. 进而, 解决了 Burton 提出的关于线性积分方程和线性微分积分方程的解的渐近稳定性的一个公开问题.

关键词　积分方程, 微分积分方程, 反例, 周期解

中图分类号　O 175.6　　　　文献标识码　A

1　问题的提出

考虑下列纯量方程

$$x'(t) = p(t) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s,\quad C''(t) > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \alpha x(t-h) + p(t) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s,\quad C''(t) \geq 0, |\alpha| < 1, \tag{2}$$

其中

$$p(t+T) = p(t), \int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s = 0, h \text{ 为一常数}. \tag{3}$$

在文 [1] 中, Burton 给出了如下定理:

定理 **1** [1]　方程(1)及(2)具有唯一的 T-周期解.

此外, Burton 在文 [1] 中还提出了如下的公开问题:

问题 **1** [1]　当 $p(t)\equiv 0$ 时, 我们的定理的结论能否改成渐近稳定的问题, 下面予以讨论.

本文首先巧妙地给出方程(1)及方程(2)具有无穷多个 T-周期解的有趣反例, 这两个反例说明了定理 1 [1] 的结论是不成立的; 进而又举出两个例子, 给问题 1 [1] 一个否定的答案, 从而解决了问题 1 [1].

2　两个反例

反例 **1**　考虑如下的纯量微分积分方程

收稿日期　2000-11-12　　　作者简介　王全义(1955-), 男, 教授

基金项目　福建省自然科学基金资助项目

$$x'(t) = \sin t - \int_{t-2\pi}^{t}\left[e^{t-s} + \frac{1-e^{2\pi}}{2\pi}\right]x(s)\,ds. \tag{4}$$

显然, $p(t) = \sin t$, $T = 2\pi$, $C(t) = e^{t} + \dfrac{1-e^{2\pi}}{2\pi}$. 从而有

$$p(t+2\pi) = p(t),\quad \int_{0}^{2\pi} p(s)\,ds = 0,\quad C'(t) = e^{t} > 0.$$

因此, 对于方程(4)(即方程(1)), 定理1[] 中的所有条件都满足. 然而方程(4)却具有无穷多个 2π-周期解

$$x(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}\sin t - \frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}\cos t + c_1, \tag{5}$$

其中 c_1 是一个任意常数.

事实上, 把式(5)代入方程(4)的左边得

$$x'(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}\cos t + \frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}\sin t. \tag{6}$$

把式(5)代入方程(4)的右边得

$$\begin{aligned}
I &\overset{\Delta}{=} \sin t - \int_{t-2\pi}^{t}\left[e^{t-s} + \frac{1-e^{2\pi}}{2\pi}\right]x(s)\,ds = \\
&\sin t - \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}\int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\sin s\,ds + \frac{(e^{2\pi}-1)^2}{2\pi(e^{4\pi}+1)}\int_{t-2\pi}^{t}\sin s\,ds + \\
&\frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}\int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\cos s\,ds - \frac{e^{4\pi}-1}{2\pi(e^{4\pi}+1)}\int_{t-2\pi}^{t}\cos s\,ds - c_1\int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\,ds - \frac{c_1(1-e^{2\pi})}{2\pi}\int_{t-2\pi}^{t} ds = \\
&\sin t - \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}\int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\sin s\,ds + 0 + \frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}\int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\cos s\,ds - 0 + c_1\left[e^{t-s}\right]_{t-2\pi}^{t} - c_1(1-e^{2\pi}) \\
&\overset{\Delta}{=} \sin t - \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}I_1 + \frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}I_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $I_1 = \int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\sin s\,ds$, $I_2 = \int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\cos s\,ds$. 利用分部积分法得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\sin s\,ds \overset{u=t-s}{=\!=\!=} \int_{2\pi}^{0} e^{u}\sin(t-u)(-du) = \\
&\int_{0}^{2\pi} e^{u}\sin(t-u)\,du = \int_{0}^{2\pi}\sin(t-u)\,de^{u} = \\
&\left[e^{u}\sin(t-u)\right]_{0}^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi} e^{u}\cos(t-u)\cdot(-1)\,du = \\
&(e^{2\pi}-1)\sin t + \int_{0}^{2\pi}\cos(t-u)\,de^{u} = \\
&(e^{2\pi}-1)\sin t + \left[e^{u}\cos(t-u)\right]_{0}^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi} e^{u}\left[-\sin(t-u)\right]\cdot(-1)\,du = \\
&(e^{2\pi}-1)(\sin t + \cos t) - \int_{0}^{2\pi} e^{u}\sin(t-u)\,du.
\end{aligned}$$

从而我们有

$$I_1 = \int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\sin s\,ds = \frac{e^{2\pi}-1}{2}(\sin t + \cos t). \tag{8}$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
I_2 = {}& \int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\cos s\,ds \xlongequal{u=t-s} \int_{2\pi}^{0} e^{u}\cos(t-u)\cdot(-1)\,du = \\
& \int_{0}^{2\pi} e^{u}\cos(t-u)\,du = \int_{0}^{2\pi}\cos(t-u)\,de^{u} = \\
& [e^{u}\cos(t-u)]_{0}^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi} e^{u}[-\sin(t-u)]\cdot(-1)\,du = \\
& (e^{2\pi}-1)\cos t - \int_{0}^{2\pi}\sin(t-u)\,de^{u} = \\
& (e^{2\pi}-1)\cos t - [e^{u}\sin(t-u)]_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi} e^{u}\cos(t-u)\cdot(-1)\,du = \\
& (e^{2\pi}-1)(\cos t-\sin t) - \int_{0}^{2\pi} e^{u}\cos(t-u)\,du,
\end{aligned}
$$

从而有

$$
I_2 = \int_{t-2\pi}^{t} e^{t-s}\cos s\,ds = \frac{e^{2\pi}-1}{2}(\cos t-\sin t). \tag{9}
$$

式(8)及(9)代入式(7),得

$$
\begin{aligned}
I = {}& \sin t - \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}I_1 + \frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}I_2 = \sin t - \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{2}(\sin t+\cos t) + \\
& \frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{2}(\cos t-\sin t) = \sin t - \frac{e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}{2(e^{4\pi}+1)}\sin t - \frac{e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}{2(e^{4\pi}+1)}\cos t + \\
& \frac{e^{4\pi}-1}{2(e^{4\pi}+1)}\cos t - \frac{e^{4\pi}-1}{2(e^{4\pi}+1)}\sin t = \left[1 - \frac{e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}{2(e^{4\pi}+1)} - \frac{e^{4\pi}-1}{2(e^{4\pi}+1)}\right]\sin t + \\
& \left[\frac{e^{4\pi}-1}{2(e^{4\pi}+1)} - \frac{e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}{2(e^{4\pi}+1)}\right]\cos t = \frac{e^{2\pi}+1}{e^{4\pi}+1}\sin t + \frac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}+1}\cos t.
\end{aligned} \tag{10}
$$

由式(6),(7)及(10)即知式(5)定义的 $x(t)$ 是方程(4)的 2π-周期解. 由于常数 c_1 是任意的, 因此方程(4)具有无穷多个 2π-周期解. 这就证明了定理 1[] 的结论对于方程(1)是不成立的.

反例 **2**　考虑如下纯量线性方程

$$
x(t) = \frac{1}{2}x(t-2\pi) + \sin t - \int_{t-2\pi}^{t}\left[e^{t-s} + \frac{1-2e^{2\pi}}{4\pi}\right]x(s)\,ds. \tag{11}
$$

显然, $C(t) = e^{t} + \dfrac{1-2e^{2\pi}}{4\pi}$, $p(t) = \sin t$, $h = 2\pi$ 且 $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $T = 2\pi$. 因此, 对于方程(11)(即方程(2)), 定理 1[] 中的所有条件都满足. 但是方程(11)却具有无穷多个 2π-周期解

$$
x(t) = \frac{2e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\sin t - \frac{2(e^{2\pi}-1)}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\cos t + c_1, \tag{12}
$$

其中 c_1 为任意常数.

事实上, 把式(12)代入方程(11)的右边, 并由式(8)及(9), 我们有

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}x(t-2\pi) + \sin t - \int_{t-2\pi}^{t}\left[e^{t-s} + \frac{1-2e^{2\pi}}{4\pi}\right]x(s)\,ds = \\
& \frac{1}{2}\left[\frac{2e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\sin(t-2\pi) - \frac{2(e^{2\pi}-1)}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\cos(t-2\pi) + c_1\right] + \\
& \sin t - \int_{t-2\pi}^{t}\left[e^{t-s} + \frac{1-2e^{2\pi}}{4\pi}\right]\cdot
\end{aligned}
$$

$$[\frac{2e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\sin s-\frac{2(e^{2\pi}-1)}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\cos s+c_1]ds=$$

$$\frac{1}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}[e^{2\pi}\sin t+(1-e^{2\pi})\cos t]+\frac{c_1}{2}+\sin t-$$

$$\frac{2e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\int_{-2\pi}e^{t-s}\sin s\,ds-\frac{e^{2\pi}(1-2e^{2\pi})}{2\pi(2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1)}\int_{-2\pi}\sin s\,ds+$$

$$\frac{2(e^{2\pi}-1)}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\int_{-2\pi}e^{t-s}\cos s\,ds+\frac{(1-2e^{2\pi})(e^{2\pi}-1)}{2\pi(2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1)}\int_{-2\pi}\cos s\,ds-$$

$$c_1\int_{-2\pi}e^{t-s}ds-\frac{c_1(1-2e^{2\pi})}{4\pi}\int_{-2\pi}ds=$$

$$\frac{1}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}[e^{2\pi}\sin t+(1-e^{2\pi})\cos t]+\frac{c_1}{2}+\sin t$$

$$-\frac{2e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{2}\cdot(\sin t+\cos t)-0+\frac{2(e^{2\pi}-1)}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\cdot$$

$$\frac{e^{2\pi}-1}{2}(\cos t-\sin t)+0+c_1[e^{t-s}]_{t-2\pi}^{t}-\frac{(1-2e^{2\pi})c_1}{2}=$$

$$[1+\frac{e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}-\frac{e^{4\pi}-e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}-\frac{e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}]\sin t+$$

$$[\frac{1-e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}-\frac{e^{4\pi}-e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}+\frac{e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}]\cos t+$$

$$[\frac{1}{2}+(1-e^{2\pi})+\frac{2e^{2\pi}-1}{2}]c_1=$$

$$\frac{2e^{2\pi}}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\sin t-\frac{2(e^{2\pi}-1)}{2e^{4\pi}-2e^{2\pi}+1}\cos t+c_1=x(t), \tag{13}$$

即 $x(t)$ 是方程(11)的 2π-周期解. 由于常数 c_1 是任意的, 故方程(11)具有无穷多个 2π-周期解. 这就证明了文〔〕中的定理1的结论对于方程(2)也是不成立的.

事实上, 值得注意的是在文〔〕的定理1的证明中, Burton 仅证明了方程(1)和方程(2)具有平均值为零的 T-周期解是唯一的.

综上所述, 文〔〕中的定理1应改正为如下的两个定理之一:

定理A 方程(1)及方程(2)至少存在一个 T-周期解.

定理B 方程(1)及方程(2)存在唯一的具有平均值为零的 T-周期解.

3 公开问题的解答

本节将给出问题1的一个否定的答案.

例1 当 $p(t)\equiv 0$ 时, 方程(4)即为如下方程

$$x'(t)=-\int_{-2\pi}[e^{t-s}+\frac{1-e^{2\pi}}{2\pi}]x(s)\,ds. \tag{14}$$

由于

$$\int_{-2\pi}C(t-s)\,ds=\int_{-2\pi}[e^{t-s}+\frac{1-e^{2\pi}}{2\pi}]\,ds=$$

$$\left[-e^{t-s}+\frac{(1-e^{2\pi})s}{2\pi}\right]_{t-2\pi}^{t}=0$$

因此, 对于任意常数 c_1, $x_0(t)\equiv c_1$ 都是方程(14)的 2π-周期解. 由于方程(14)是线性齐次的, 因此, 如果 $x_1(t)$ 是方程(14)的任意一个解, 则 $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ 也是方程(14)的解. 由此可知, 只要 $c_1\neq 0$ 且 $|c_1|$ 充分小, 则 $|x(t)-x_1(t)|=|c_1|$ 也充分小, 但是 $x(t)-x_1(t)\equiv c_1 \not\to 0$ $(t\to+\infty)$. 从而, 方程(14)的任一解都不是渐近稳定的. 因此, 对于方程(1), 问题 1 的答案是否定的.

例 **2**　在反例 2 中, 当 $p(t)\equiv 0$ 时, 方程(11)即为如下方程

$$x(t)=\frac{1}{2}x(t-2\pi)-\int_{-2\pi}\left[e^{t-s}+\frac{1-2e^{2\pi}}{4\pi}\right]x(s)\,ds. \tag{15}$$

由于

$$\int_{-2\pi}C(t-s)\,ds=\int_{-2\pi}\left[e^{t-s}+\frac{1-2e^{2\pi}}{4\pi}\right]ds=\left[-e^{t-s}+\frac{(1-2e^{2\pi})s}{4\pi}\right]_{t-2\pi}^{t}$$
$$=-1+e^{2\pi}+\frac{(1-2e^{2\pi})\cdot 2\pi}{4\pi}=-\frac{1}{2},$$

因此, 对于任意常数 c_1, $x_0(t)\equiv c_1$ 都是方程(15)的 2π-周期解. 又由于方程(15)是线性齐次的, 因此如果 $x_1(t)$ 是方程(15)的任意一个解, 则 $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ 也是方程(15)的解. 由此可知, 只要 $c_1\neq 0$ 且 $|c_1|$ 充分小, 则 $|x(t)-x_1(t)|=|c_1|$ 也是充分小, 但是 $x(t)-x_1(t)\equiv c_1\not\to 0$ $(t\to+\infty)$. 故方程(15)的任一解都不是渐近稳定的. 因此, 对于方程(2), 问题 1 的答案也是否定的.

参　考　文　献

1　Burton T A. Linear integral equations and periodicity[J]. Ann. of Diff. Eqs., 1997, 13(4): 313～326

2　王全义. 一类周期微分系统的周期解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1993, 14(1): 12～19

3　王全义. 周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]. 数学年刊, 1994, 15A(5): 537～545

Periodic Solution to Integrodifferential Equation

Wang Quanyi

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A linear integral equation and a linear integrodifferential equation, namely, two interesting counter-examples with infinite periodic solutions are ingeniously given for illustrating some results of Burton to be false. And then, the asymtotic stability of the solutions to linear integral equation and linear integrodifferential equation as proposed by Burton as an open issue is solved.

Keywords　integral equation, integrodifferential equation, counterexamples, periodic solution