

文章编号 1000-5013(2001) 01-020-06

对流-扩散方程精细积分法与差分法比较

曾 文 平

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要 可用单内点子域精细积分, 求解对流-扩散方程初值问题. 当单内点精细积分中的传递函数, 即指数函数用 Taylor 展开式的一阶近似来替代时, 精细积分转化为差分方程. 文中研究了这一对应关系. 各种常见差分格式均找到了对应的单点精细积分格式, 并在单点精细积分一般公式中得到了统一表达式.

关键词 对流-扩散方程初值问题, 偏微分方程数值解, 精细积分法

中图分类号 O 241. 82

文献标识码 A

对流-扩散方程是描述粘性流体运动的非线性方程的线性化模型方程, 并且它本身也描述了许多自然现象. 文 [1] 对抛物型方程提出了精细时程积分法, 文 [2] 提出了子域积分方法, 并指出古典显式差分格式是单点精细积分的近似和特例. 文 [3] 进一步指出, 其它差分格式也是单点精细积分格式不同形式的近似, 给出了不同差分格式在单点精细积分一般公式中的统一表达, 并作了比较研究. 本文将单点精细积分格式用于对流-扩散方程, 并指出相应的差分格式也可视为单点精细积分格式不同形式的近似. 进而, 给出了不同差分格式在单点精细积分一般公式中的统一表达, 并作了比较研究.

1 计算对流扩散方程初值问题的精细积分法

考虑一维对流-扩散方程第一边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0, \epsilon > 0), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (2)$$

$$u(0, t) = p(t), u(l, t) = q(t) \quad t \geq 0. \quad (3)$$

对函数在 x 方向离散, 分 l 为 m 等分, 即 $x_j = j \Delta x, j = 0, 1, \dots, m, \Delta x = l/m$. 得常微分方程组为

$$\frac{du_j}{dt} + a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{\epsilon}{(\Delta x)^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, m-1), \quad (4)$$

$$u_j(0) = u_{0j}, \quad (5)$$

$$u_0(t) = p(t), u_m(t) = q(t), (t \geq 0), \quad (6)$$

其中 $u_j = u(x_j)$. 对问题(4) ~ (6) 采用子域积分方法. 子域积分法, 可以采用不同数量内点, 今以一个内点为例. 对式(4) 进行移项, 得式(7); 由式(7), 则可解为式(8). 即

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{2\epsilon}{(\Delta x)^{2u_j}} = \frac{\epsilon}{(\Delta x)^2} \{ (u_{j+1} + u_{j-1}) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon} (u_{j+1} - u_{j-1}) \}. \quad (7)$$

$$u_j(t) = e^{-\frac{2\epsilon}{(\Delta x)^2}t} u_{j0} + \frac{\epsilon}{(\Delta x)^2} \int_0^t e^{-\frac{2\epsilon}{(\Delta x)^2}(t-s)} \{ u_{j+1} + u_{j-1} - \frac{a\Delta x}{2\epsilon} (u_{j+1} - u_{j-1}) \} ds. \quad (8)$$

对时间坐标离散化, 步长为 Δt . 第 n 个离散点 $t = t_n = n\Delta t$ 上的 u_j 值, 用 u_j^n ($n = 0, 1, \dots$) 表示并有两种积分形式. (1) 积分区间为 $[t_n, t_{n+1}]$ 时, 有

$$u_j^{n+1} = e^{-2\epsilon} u_j^n + \frac{\epsilon}{(\Delta x)^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\frac{2\epsilon}{(\Delta x)^2}(t_{n+1}-s)} \{ [u_{j+1}(s) + u_{j-1}(s)] - \frac{a\Delta x}{2\epsilon} [u_{j+1}(s) - u_{j-1}(s)] \} ds, \quad (9)$$

其中 $r = \Delta t / (\Delta x)^2$. 假设 u_{j+1}, u_{j-1} , 分别用常数 u_{j+1}^* 和 u_{j-1}^* 表示. 那么式(9) 可用两层显式表示的单点子域积分为

$$u_j^{n+1} = e^{-2\epsilon} u_j^n + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\epsilon}) \{ (u_{j+1}^* + u_{j-1}^*) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon} (u_{j+1}^* - u_{j-1}^*) \}. \quad (10)$$

(2) 积分区间为 $[t_{n-1}, t_{n+1}]$ 时, 有

$$u_j^{n+1} = e^{-4\epsilon} u_j^{n-1} + \frac{\epsilon}{(\Delta x)^2} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} e^{-\frac{2\epsilon}{(\Delta x)^2}(t_{n+1}-s)} \{ [u_{j+1}(s) + u_{j-1}(s)] - \frac{a\Delta x}{2\epsilon} [u_{j+1}(s) - u_{j-1}(s)] \} ds. \quad (11)$$

同样若 u_{j+1}, u_{j-1} 分别用常数 u_{j+1}^* , u_{j-1}^* 表示, 则式(11) 可用三层显式表示的单点子域积分为

$$u_j^{n+1} = e^{-4\epsilon} u_j^{n-1} + \frac{1}{2} (1 - e^{-4\epsilon}) \{ (u_{j+1}^* + u_{j-1}^*) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon} (u_{j+1}^* - u_{j-1}^*) \}, \quad (12)$$

其中 u^k 通常取 u_k^n, u_k^{n+1} 或 $\frac{1}{2}(u_k^n + u_k^{n+1})$, $k = j-1, j+1$. 可组合成 $u_{j+1}^* - u_{j-1}^*$ 及 $u_{j+1}^* + u_{j-1}^*$ 的多种不同搭配. 本文仅取常用的 5 种搭配形式: (A) $u_{j+1}^* = u_{j+1}^n, u_{j-1}^* = u_{j-1}^n$; (B) $u_{j+1}^* = u_{j+1}^{n+1}, u_{j-1}^* = u_{j-1}^{n+1}$; (C) $u_{j+1}^* = u_{j+1}^n, u_{j-1}^* = u_{j-1}^{n+1}$; (D) $u_{j+1}^* = u_{j+1}^{n+1}, u_{j-1}^* = u_{j-1}^n$; (E) $u_{j+1}^* = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n+1}), u_{j-1}^* = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n+1})$. 于是式(10), (12) 各有 5 种不同的精细积分格式. 例如, 式(10) 取第 1 种搭配式(A), 则式(10) 成为 $u_j^{n+1} = e^{-2\epsilon} u_j^n + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\epsilon}) \{ (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \}$, 等等. 此外, $e^{-2\epsilon}$ 及 $e^{-4\epsilon}$ 又有多种不同的近似形式. 例如, 取 Taylor 展开式的一阶近似, 便有 $e^{-2\epsilon} \approx 1 - 2\epsilon, e^{-2\epsilon} \approx \frac{1}{e^{2\epsilon}}, \frac{1}{1 + 2\epsilon}, e^{-2\epsilon} \approx \frac{e^{-\epsilon}}{e^{\epsilon}}, \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$ 等多种常见形式. 代回式(10) 或式(12) 的不同搭配形式, 可得到各种不同的对应的差分格式.

2 精细积分近似表达式与差分格式的对应关系

先考虑积分区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上的单点子域精细积分式(10). (1) 取搭配(A) 时为精细积分格式(I) (表 1, 下同). 取 $e^{-2\epsilon}$ 的一阶 Taylor 近似表示 $e^{-2\epsilon} \approx 1 - 2\epsilon$, 代入格式(I), 便得显式中心

差分格式(表1,下同)。(2)取搭配(B)时为精细积分格式()。取 $e^{-2\sigma} = \frac{1}{e^{-1/2\epsilon r}} = \frac{1}{1+2\epsilon r}$,代入

表1 单点精细积分格式和差分格式对照表

方法	精细积分格式	相应的差分模式
	$u_j^{n+1} = e^{-2\sigma} u_j^n + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma})$	*
	$\{ (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \}$	· · ·
*	$e^{-2\sigma} = 1 - 2\sigma$	显式中心差分格式
	$u_j^{n+1} = (1 - 2\sigma) u_j^n + \sigma \{ (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \}$	$u_j^{n+1} = u_j^n + \epsilon \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right)$
	$u_j^{n+1} = e^{-2\sigma} u_j^n + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma}) \cdot$	* * *
	$\{ (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \}$	·
*	$e^{-2\sigma} = \frac{1}{1+2\sigma}$	全隐式中心差分格式
	$(1 + 2\sigma) u_j^{n+1} = u_j^n + \sigma \{ (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \}$	$u_j^{n+1} = u_j^n + \epsilon \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \right)$
	$u_j^{n+1} = e^{-2\sigma} u_j^n + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma})$	· *
	$\{ (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \}$	· ·
*	$e^{-2\sigma} = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$	半显式格式($p = r \frac{a\Delta x}{2}, q = \sigma$)
	$(1 + \epsilon r) u_j^{n+1} = (1 - \epsilon r) u_j^n + \sigma (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \frac{a\Delta x}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})$	$-(p+q)u_{j-1}^{n+1} + (1+q)u_j^{n+1} = (1-q)u_j^n + (q-p)u_{j+1}^n$
	$u_j^{n+1} = e^{-2\sigma} u_j^n + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma})$	* ·
	$\{ (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^n) \}$	· ·
*	$e^{-2\sigma} = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$	半显式格式($p = r \frac{a\Delta x}{2}, q = \sigma$)
	$(1 + \epsilon r) u_j^{n+1} = (1 - \epsilon r) u_j^n + \sigma (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^n)$	$(1+q)u_j^{n+1} + (p-q)u_{j+1}^{n+1} = (q+p)u_{j-1}^n + (1-q)u_j^n$
	$u_j^{n+1} = e^{-2\sigma} u_j^n + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma}) \{ (u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n+1}) / 2 - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n+1}) \}$	* * *
		· · ·

续表

方法	精细积分格式	相应的差分模式
*	$e^{-2\epsilon} \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$	Crank-Nicolson 隐格式
	$(1+\epsilon)u_j^{n+1} = (1-\epsilon)u_j^n + \frac{\epsilon\tau}{4}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})$	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2} \left\{ \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right\} = \frac{\epsilon}{2} \left\{ \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right\}$
	$u_j^{n+1} = e^{-4\epsilon} u_j^n + \frac{1}{2}(1 - e^{-4\epsilon}) \cdot \{ (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \}$	*
*	$e^{-4\epsilon} \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$	Dufort Frankel 三层显格式
	$(1+2\epsilon)u_j^{n+1} = (1-2\epsilon)u_j^{n-1} + 2\epsilon \cdot \{ (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \}$	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = \epsilon(u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n) / (\Delta x)^2$

格式(), 使得隐式中心差分格式. (3) 取搭配(C)时为精细积分格式(). 取 $e^{-2\epsilon} = \frac{e^{-\epsilon}}{e} =$

$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$, 则有

$$(1+\epsilon)u_j^{n+1} = (1-\epsilon)u_j^n + \epsilon(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

若令 $p = \frac{a\Delta t}{2\Delta x} = r \frac{a\Delta x}{2}$, $q = \epsilon$, $r = \Delta t / (\Delta x)^2$, 则上式成为

$$-(p+q)u_{j-1}^{n+1} + (1+q)u_j^{n+1} = (1-q)u_j^n + (q-p)u_{j+1}^n.$$

此即文 [4] 中的一种半显式格式. (4) 取搭配(D)时为精细积分格式(). 仍取 $e^{-2\epsilon} = \frac{e^{-\epsilon}}{e} =$

$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$, 得 $(1+\epsilon)u_j^{n+1} = (1-\epsilon)u_j^n + \epsilon(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$. 这是文 [4] 中另一种半

显式格式, 即

$$(1+q)u_j^{n+1} + (p-q)u_{j+1}^n = (q+p)u_{j-1}^n + (1-q)u_j^n.$$

(5) 取搭配(E)时为精细积分格式(). 仍取 $e^{-2\epsilon} = \frac{e^{-\epsilon}}{e} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$, 使得 Crank-Nicolson 隐格

式. (6) 最后考虑积分区间 $[t_{n-1}, t_{n+1}]$ 上的单点子域精细积分式(12), 有

$$u_j^{n+1} = e^{-4\epsilon} u_j^{n-1} + \frac{1}{2}(1 - e^{-4\epsilon}) \{ (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\Delta x}{2\epsilon}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \}. \quad (13)$$

取 $e^{-4\epsilon} = \frac{e^{-2\epsilon}}{e} = \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$, 代入(13)式, 使得 DuFort-Franke 型中心差分格式.

注. 根据算例结果和截断误差分析, 不同精细积分格式的3种近似式中, 有一种精度最高. 上述讨论的格式, 即是其精度最高者. 其余近似式略去.

为使用和比较方便起见, 上述 6 种搭配分别用数字 1, 2, ..., 6 表示, 并列成表 1, 其中带 * 号者为它们的最佳近似式. 本表共 2 列, 左列是精细积分及其近似式, 右例为由差分直接

得到的格式. 两者事实上是一致的, 只是表示方法不同而已.

3 数值例子

例如, 考虑对流-扩散方程第一边值问题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t > 0), \\ u(x, 0) &= e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1), \\ u(0, t) &= e^{(\epsilon - a)t}, u(1, t) = e^{-x + (\epsilon - a)t} \quad (t > 0). \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

其精确解为

$$u(x, t) = e^{-x + (\epsilon - a)t} \quad (0 \leq x \leq 1, t > 0). \tag{15}$$

取 $a = \pm 1, \epsilon = 10^{-1}, 10^{-5}, 10^{-9}, \Delta x = 0.1$, 然后取 $\Delta t = 0.002\ 5, 0.005\ 0$ 和 $0.010\ 0$. 用不同格式进行计算, 并与精确解作比较. 差分计算与对应的精细积分近似计算结果完全相同, 不重复列出. 为节省篇幅计, 表 2 仅列出部分计算结果.

4 结论

从以上的论述和表 2 的计算, 我们可以得到如下初步结论. (1) 各种格式对各种不同雷诺数均是有效的. 当 $\epsilon = 10^{-1}$ 时, 格式 , 精度较差. 当 $\epsilon = 10^{-5}$ 时, 格式 精度较差. 当 $\epsilon = 10^{-9}$ 时, 格式 , 精度较差. (2) 在精细积分计算中, 指数函数取准确值的效果不如最好的近似式. 这是由于式 (9) 及式 (10) 中, 其右端第 2 项处理粗糙所致. (3) 不同差分格式可由精细积分统一表达式 (10) 和 (12) 取 $e^{-2\sigma}, e^{-4\sigma}$ 不同近似式及第二项的 w_{j+1}^* 及 w_{j-1}^* 的不同搭配表示. (4) 从计算结果看, 精细积分是无条件稳定的. 该方法的稳定性及相容性将另文研究.

表 2 用不同格式计算例 1 的结果($a = 1, \Delta = 0.1, t = 0.25$)

ϵ	格 式	$\Delta t = 0.002\ 5$ 的 x 值			$\Delta t = 0.005\ 0$ 的 x 值		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
10^{-1}	精确解	0.882 50	0.722 53	0.591 56	0.882 50	0.722 53	0.591 56
		0.876 75	0.718 79	0.566 55	0.876 84	0.718 84	0.566 68
	*	0.882 54	0.722 57	0.591 59	0.882 26	0.722 30	0.591 37
		0.888 30	0.727 97	0.596 01	0.893 87	0.733 29	0.600 39
	*	0.883 11	0.723 10	0.592 02	0.883 39	0.723 36	0.592 24
		0.885 90	0.725 72	0.594 17	0.888 92	0.728 58	0.596 54
	*	0.885 94	0.725 76	0.594 20	0.889 10	0.728 75	0.596 68
		0.885 94	0.725 76	0.594 20	0.889 10	0.728 75	0.596 68
	*	0.885 94	0.725 76	0.594 20	0.889 10	0.728 75	0.596 68
		0.882 78	0.722 79	0.591 77	0.882 65	0.722 67	0.591 67
	*	0.882 82	0.722 83	0.591 80	0.882 82	0.722 83	0.591 80
		1.030 66	0.885 81	0.737 05	1.019 29	0.871 25	0.722 55
10^{-9}	*	0.882 82	0.722 82	0.591 79	0.882 76	0.722 78	0.59176
	精确解	0.860 71	0.704 69	0.576 95	0.860 71	0.704 69	0.576 95
		0.860 80	0.704 76	0.570 00	0.860 53	0.704 54	0.576 85

续表

ϵ	格 式	$\Delta t=0.0025$ 的 x 值			$\Delta t=0.0050$ 的 x 值		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
10^{-9}	*	0.860 80	0.704 76	0.570 00	0.860 53	0.704 54	0.576 85
		0.861 32	0.705 20	0.577 30	0.861 58	0.705 42	0.577 45
	*	0.861 32	0.705 20	0.577 30	0.861 58	0.705 42	0.577 45
		0.670 32	0.548 81	0.449 33	0.670 32	0.548 81	0.449 33
	*	0.863 74	0.707 21	0.578 70	0.866 48	0.709 50	0.580 32
		0.863 74	0.707 21	0.578 70	0.866 48	0.709 50	0.580 32
	*	0.863 74	0.707 21	0.578 70	0.866 48	0.709 50	0.580 32
		0.861 06	0.704 98	0.577 15	0.861 06	0.704 98	0.577 15
	*	0.861 06	0.704 98	0.577 15	0.861 06	0.74 98	0.577 15
		1.052 44	0.879 29	0.672 82	1.054 34	0.880 28	0.672 71
	*	0.816 06	0.704 98	0.472 37	0.861 06	0.704 98	0.577 15

参 考 文 献

1 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 1~6
2 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 253~260
3 沈为平. 扩散方程单内点精细积分法与差分法比较研究[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, 13(3): 359~363
4 曾文平. 对流-扩散方程的若干 AGE 方法与 ADE 格式及其稳定性[J]. 华侨大学报, (自然科学版), 1999, 20(3): 230~236

A Comparative Study on Fine Integral
Method and Difference Method for
Convection-Diffusion Equation

Zeng Wenping

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Initial value as a problem of convection-diffusion equation can be solved by applying fine integral of single inner-point subdomains. When the transfer function, namely, exponential function in fine integral of single inner-point is replaced by first order approximation of Taylor expansion equation, the fine integral is transferred into difference equation. This correspondence is studied by this paper. Different kinds of common difference schemes have got corresponding fine integral schemes of single point; and also the unified eapression in general formula of single point fine integral.

Keywords initial value as a problem to convection-diffusion equation, numerical solution of partial differential equation, fine integral method