

文章编号 1000-5013(2001) 01-017-03

$m \times n$ 矩形的格点平行四边形和正方形的计数

李志伟 沈晓斌

(泉州师范学院数学系, 泉州 362000)

摘要 通过引入具有性质 E 的平行四边形和正方形的概念, 求出 $m \times n$ 矩形的内含 $i \times j$ 矩形. 它具有性质 E 的平行四边形(简称 E 平行四边形)个数, 又具有性质 E 的正方形(简称 E 正方形)个数. 进而, 求出 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形个数和格点正方形个数.

关键词 $m \times n$ 矩形, 内含 $i \times j$ 矩形, 内含 $i \times i$ 正方形, E 平行四边形, E 正方形

中图分类号 O 157. 1

文献标识码 A

设有间距为单位 1 的 m 条平行线和与之垂直的间距为 1 的 n 条平行线, 这些平行线的 mn 个交点称之为格点. 这两组互相垂直的平行线所组成的最大矩形, 称之为 $m \times n$ 矩形. 文中所谈到的 $m \times n$ 矩形均指这种矩形. 以这些格点为顶点的平行四边形(正方形), 叫做 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形(正方形)^[1,2]. 文[1, 2]研究了, 平面格图圈的计数, 本文从另一方面就 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形与格点正方形的计数进一步讨论. 这是建筑装修中经常要考虑的一个组合问题. 为了求出 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形个数和格点正方形个数, 先引入内含 $i \times j$ 矩形与具有性质 E 的平行四边形和具有性质 E 的正方形的概念.

定义 1 若 $i \times j$ 矩形是由 $m \times n$ 矩形的 m 条平行线中的相邻的 $i(2 \leq i \leq m)$ 条平行线, 与 n 条平行线中相邻的 $j(2 \leq j \leq n)$ 条平行线所形成的最大矩形, 则称这样的 $i \times j$ 矩形为 $m \times n$ 矩形的内含 $i \times j$ 矩形.

定义 2 若 $i \times j$ 矩形 $ABCD$ 的格点平行四边形的 4 个顶点, 在矩形 $ABCD$ 的一组邻边上的垂直投影的集合包含 $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$ 和 $\{B, C, D\}$ 之一, 则称该格点平行四边形具有性质 E , 或称这样的格点平行四边形为 $i \times j$ 矩形的 E 平行四边形.

$i \times j$ 矩形的 E 平行四边形可分成两类. 第一类是以 $i \times j$ 矩形的 $ABCD$ 的对角线为对角线的 E 平行四边形. 第二类是格点平行四边形的 4 个顶点, 分别位于 $i \times j$ 矩形 $ABCD$ 4 条边上(不含两端端点)的 E 平行四边形.

下面计算^[6] $i \times j$ 矩形的 E 平行四边形个数. (1) 计算 $i \times j$ 矩形的第一类 E 平行四边形个数. 首先, 我们知道落在 $i \times j$ 矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC(BD)$ 内部的格点数 $d = (i-1)(j-1) -$

1, 此处 (a, b) 表示 a, b 的最大公因子, 并记 $(i-1, j-1) = d(i, j)$. 其次, 一方面, 由于 $i \times j$ 矩形的所有格点关于 $AC(BD)$ 的中点为中心对称, 所以以 $AC(BD)$ 为对角线的 E 平行四边形的个数均为 $(ij - d - 2)/2$. 另一方面, 分别以 AC 和 BD 为对角线的 E 平行四边形集合中有唯一的公共元素——矩形 $ABCD$. 因此, 所求的 $i \times j$ 矩形的第一类 E 平行四边形的个数, 等于 $(ij - d - 2) - 1 = ij - (i-1, j-1) - 2$. (2) 根据第二类 E 平行四边形的定义和排列组合的知识, 知其个数为 $(i-2)(j-2)$. 于是, $i \times j$ 矩形的所有 E 平行四边形的个数为 $ij - (i-1, j-1) - 2 + (i-2)(j-2) = 2ij - 2(i+j) - (i-1, j-1) + 2 = 2(i-1)(j-1) - d(i, j)$. (3) 计算 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形个数, 记 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形个数为 $P(m, n)$.

定理 1 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形个数为

$$P(m, n) = \frac{1}{18}mn(m^2 - 1)(n^2 - 1) - \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n (m+1-i)(n+1-j)d(i, j). \quad (1)$$

证明 每一个 $m \times n$ 矩形的格点平行四边形, 均是某一唯一的内含 $i \times j$ 矩形(其中 $2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n$) 的 E 平行四边形形; $m \times n$ 矩形, 含有 $(m+1-i)(n+1-j)$ 个不同的内含 $i \times j$ 矩形. 所以, $m \times n$ 矩形的所有格点平行四边形个数, 应为 $m \times n$ 矩形的全体内含 $i \times j$ 矩形的所有 E 平行四边形的个数之和. 即

$$P(m, n) = \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n [2(i-1)(j-1) - d(i, j)](m+1-i)(n+1-j).$$

由于

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n (i-1)(j-1)(m+1-i)(n+1-j) = \\ & \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n [(m+1)(n+1)(i-1)(j-1) - 2(m+1)(i-1) \frac{j(j-1)}{2} - \\ & 2(n+1)(j-1) \frac{i(i-1)}{2} + 4 \frac{i(i-1)}{2} \frac{j(j-1)}{2}] = \\ & (m+1)(n+1) \sum_{i=2}^m (i-1) \sum_{j=2}^n (j-1) - 2(m+1) \sum_{i=2}^m (i-1) \sum_{j=2}^n \frac{j(j-1)}{2} - \\ & 2(n+1) \sum_{j=2}^n \frac{j(j-1)}{2} \sum_{i=2}^m (i-1) + 4 \sum_{i=2}^m \frac{i(i-1)}{2} \sum_{j=2}^n \frac{j(j-1)}{2} = \\ & (m+1)(n+1) C_m^2 C_n^2 - 2(m+1) C_m^2 C_{n+1}^3 - 2(n+1) C_{m+1}^3 C_n^2 + 4 C_{m+1}^3 C_{n+1}^3 = \\ & \frac{1}{36} mn(m^2 - 1)(n^2 - 1). \end{aligned}$$

所以

$$P(m, n) = \frac{1}{18} mn(m^2 - 1)(n^2 - 1) - \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n (m+1-i)(n+1-j)d(i, j).$$

定义 3 若 $i \times i$ 正方形 $ABCD$ 的格点正方形的 4 个格点, 在 $i \times i$ 正方形的一组邻边上的投影的集合, 包含了 $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}$ 和 $\{B, C, D\}$ 之一, 则称该格点正方形具有性质 E , 或称这样的格点正方形为 $i \times i$ 正方形的 E 正方形. 并记 $m \times n$ 矩形的格点正方形个数为 $S(m, n)$.

定理 2 $m \times n$ 矩形的格点正方个数为

$$S(m, n) = \sum_{i=2}^{\min(m, n)} (i-1)(m+1-i)(n+1-i).$$

$$\begin{cases} \frac{1}{12}m(m^2 - 1)(2n - m) & m < n, \\ \frac{1}{12}n(n^2 - 1)(2m - n) & n < m. \end{cases} \quad (2)$$

证明 由定理 1 前的讨论及 E 正方形的定义知, 此时 $i \times i$ 正方形 $ABCD$ 的 E 正方形的顶点只能在 AB, BC, CD, DA 4 边上, 且其重心与正方形 $ABCD$ 的重心一致. 从而, 由几何知识可知, $i \times i$ 正方形的 E 正方形个数为 $i-1$. 又每一个 $m \times n$ 矩形的格点正方形, 均是某一唯一的内含 $i \times i$ 正方形(其中 $2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n$) 的 E 正方形, $m \times n$ 矩形含有 $(m+1-i)(n+1-i)$ 个不同的内含 $i \times i$ 矩形. 所以, $m \times n$ 矩形的所有格点正方形个数, 应为 $m \times n$ 矩形的全体内含 $i \times i$ 正方形的所有 E 正方形的个数之和. 即当 $m < n$ 时, 有 $S(m, n) = \sum_{i=2}^m (i-1)(m+1-i)(n+1-i) = \frac{1}{12}m(m^2-1)(2n-m)$; 当 $n < m$ 时, 有 $S(m, n) = \sum_{i=2}^m (i-1)(m+1-i)(n+1-i) = \frac{1}{12}n(n^2-1)(2m-n)$; 当 $m = n$ 时, 有 $S(n, n) = \sum_{i=2}^m (i-1)(n+1-i)(n+1-i) = \frac{1}{12}n^2(n^2-1)$. 例如, 求 4×5 矩形的格点平行四边形个数 $P(4, 5)$. 可以解为 $P(4, 5) = \frac{1}{18} \times 4 \times 5(4^2-1)(5^2-1) - \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^5 (4+1-i)(5+1-j)d(i, j) = 800 - 3 \times 4 - 2 \times 4 - 1 \times 4 - 3 \times 3 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 3 - 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 \times 2 \times 3 - 3 \times 1 - 2 \times 1 \times 2 - 1 \times 1 = 728$.

参 考 文 献

- 1 杨 之, 张忠辅. 平面格图圈的计数[J]. 兰州铁道学院学报, 1986, 5(6): 17~20
- 2 叶秀明, 朱 相. 平面 3_n 矩形格图和环形图中圈的计数[J]. 上海科技大学学报, 1987, 10(2): 23~26
- 3 卢开澄. 组合数学[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 1993. 87~93

Counting Lattice Point Parallelograms and Lattice Point Squares from $m \times n$ Rectangles

Li Ziwei Shen Xiaobin

(Dept. of Math., Quanzhou Normal College, 362000, Quanzhou)

Abstract By leading the concept of parallelogram with property E and the concept of square with property E , the authors find out the number of parallelograms with property E (parallelogram E for short) and the number of square with property E (square E for short) from inclusive $i \times j$ rectangles in $m \times n$ rectangles; and then, find out the number of lattice point parallelograms and the number of lattice point squares from $m \times n$ rectangles.

Keywords $m \times n$ rectangles, inclusive $i \times j$ rectangles, inclusive $i \times i$ squares, parallelogram E , square E