第 22 卷 第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 22 No. 1
2001 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2001

文章编号 1000-5013(2001)01-006-04

一类唯一极值 Teichmüller 映照的存在性

刘 金 雄

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要 得到一类唯一极值 Teichmüller 映照 $g\in Q(\{\varphi_n\})$ 的一个充要条件 .

关键词 拟共形映照, 极值映照, 唯一极值映照, Teichmüller 映照, 复特征

中图分类号 O 174.55　　文献标识码 A

1 主要结果

记 Ω 是复平面 C 上边界多于一点的一个区域, f 为 Ω 上的一个拟共形映照, Q_f 表示 Ω 上与 f 有相同边界值且同伦的拟共形映照全体所组成的类 . 对任一 $g\in Q_f$, 置

$$\kappa_g(z) = g_{\bar z}/g_z, \qquad \|\kappa_g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{z\in\Omega}|\kappa_g(z)|. \tag{1}$$

说 f 是极值的, 意指 $\|\kappa_f\|_\infty = \inf_{g\in Q_f}\|\kappa_g\|_\infty$. 若这样的 f 是唯一的, 则说 f 是唯一极值映照 .

若拟共形映照的复特征具有形式

$$\kappa_f(z) = f_{\bar z}/f_z = k\overline{\varphi_0}/|\varphi_0|, \quad a.e., \tag{2}$$

其中 k 为常数, $0\le k<1$, $\varphi_0\ne 0,\infty$, $a.e.$, 则当 φ_0 为 Ω 上的可测函数时, 称 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照; 当 φ_0 在 Ω 上解析时, 称 f 为关于 φ_0 的正则 Teichmüller 映照 .

$\beta(\Omega)$ 表示 $L^1(\Omega)$ 中的解析函数的全体所组成的 Banach 空间, $\varphi\in\beta(\Omega)$, 其范数

$$\|\varphi\| = \iint_\Omega|\varphi(z)|\,dx\,dy < \infty.$$

对于 $\varphi\in\beta(\Omega)$ 记

$$\delta[\kappa_f,\varphi] = k\|\varphi\| - \mathrm{Re}\iint_\Omega\kappa_f\varphi\,dx\,dy, \tag{3}$$

其中 $k=\|\kappa_f\|_\infty$. 1981 年, Reich 证明了

定理 A [1] 设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z) = \varphi_0(z), \quad a.e., \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\delta[\kappa_f,\varphi_n] = 0, \tag{5}$$

则 f 是唯一极值映照 . 条件(4), (5) 隐含了 f 为 Teichmüller 映照这一假设, 即我们有

定理 1 [2] 设 f 为 Ω 上的一个拟共形映照, $\|\kappa_f\|_\infty = k$, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 满足

收稿日期 2000-05-19　　作者简介 刘金雄(1968-), 男, 讲师

(C)1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

条件(4), (5), 其中 $\varphi\neq 0, \infty$, $a.e.$, 则 $\kappa_f(z)=k\bar{\varphi}/|\varphi|$, $a.e.$, 且 $f(z)$ 是唯一极值映照.

1981 年, Reich 证明了

定理 **B** [3] 设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi_0(z),\ a.e.\ z\in\Omega,\ \varphi_0\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{6}$$

$$\delta\{\kappa_f,\varphi_n\}\leq M,\ n=1,2,\cdots, \tag{7}$$

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{\Omega(n,A)}|\varphi_n(z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \tag{8}$$

对 n 一致. 其中 $\Omega(n,A)=\{z\in\Omega\,|\,|\varphi_n(z)|>A|\varphi_0(z)|\}$, 则 f 是唯一极值映照. 1989 年, 刘增荣把定理 B 改进为

定理 **C** [4] 设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 满足条件(6), (7) 和

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \tag{9}$$

对 n 一致. 其中 $\Omega(n,A)$ 与(8) 中的相同, 则 f 是唯一极值映照. 作者已证明定理 B 与定理 C 中关于 φ_0 的局部可积性的假设是多余的. 即证明了

定理 **D** [4] 设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 满足条件(4), (7) 和

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ A\to\infty}}\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{10}$$

存在. 其中 $\Omega(n,A)$ 与条件(8) 中的相同, 则 f 是唯一极值映照. 严格地说, 条件(7) 应写成

$$\delta\{\kappa_f,\varphi_n\}<M(\kappa_f),\ n=1,2,\cdots. \tag{7a}$$

设 $K=(1+k)/(1-k)$, 记 $Q(\{\varphi_n\})$ 为 Ω 上的满足条件(4), (7a) 和(10) 的 K-拟共形映照的全体所组成的类. 作者得到定理 D 的一个等价条件, 即我们有

定理　设 $\kappa_g=k\bar{\varphi}_0/|\varphi_0|$, 则 $g\in Q(\{\varphi_n\})$ 的充要条件是, $Q(\{\varphi_n\})$ 中存在一列非 Teichmüller 映照 f_m, 其复特征满足

$$\lim_{n\to\infty}\kappa_{f_m}(z)=\kappa_g(z),\ a.e., \tag{11}$$

$$\delta\{\kappa_{f_m},\varphi_n\}<\tilde{M}(\kappa_g),\ m=1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots, \tag{12}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ A\to\infty}}\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_{f_m}\varphi_n)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0, \tag{13}$$

对 m 一致地成立. 其中 $\tilde{M}(\kappa_g)$ 是和 g 有关的常数.

2　定理的证明

引理　设 f 为 Ω 上拟共形映照, $k=\|\kappa_f\|_\infty$, κ_f 满足条件(4), (7a) 和(10). 这里 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n\|=\infty$, 必存在无穷多个极值非 Teichmüller 映照. 其复特征满足条件(4), (7a) 和(10).

证明　由条件(4) 及 EropoB 定理可知, 必存在 $\Omega_0\subset\Omega$, $0<m(\Omega_0)<\infty$, $\{\varphi_n\}$ 在 Ω_0 上一致收敛于 φ_0. 对任意的 $t\in[0,1]$, 置

$$\tilde{\kappa}(z,t)=\begin{cases}\kappa_f(z), & z\in\Omega\setminus\Omega_0,\\ t\kappa_f(z), & z\in\Omega_0.\end{cases}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w

因此 $\tilde{\kappa}(z,t)$ 为极值映照的复特征, 且满足条件(4),(7a)和(10). 事实上, $\tilde{\kappa}(z,t)$ 满足条件(4)是已知的假设. 由 κ_f 满足条件(7a)及 $\|\kappa_f\|_\infty = k$ 可得

$$\delta\{\tilde{\kappa},\varphi_n\} = \delta\{\kappa_f,\varphi_n\} + (1-t)\iint_{\Omega_0}\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le M(\kappa_f) + k(1-t)\iint_{\Omega_0}|\varphi_n|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 φ_n 在 Ω_0 上一致收敛可知, 必存在 N, 当 $n \ge N$ 时, $|\varphi_n(z) - \varphi_0(z)| < 1,\ z \in \Omega_0$, 故有

$$\iint_{\Omega_0}|\varphi_n|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{\Omega_0}|\varphi_n(z) - \varphi_0(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega_0}|\varphi_0(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < m(\Omega_0) + \|\varphi_0\|.$$

记 $M_1 = m(\Omega_0) + \|\varphi_0\|$, 则

$$\delta\{\tilde{\kappa},\varphi_n\} \le M(\kappa_f) + k(1-t)M_1 < M(\kappa_f) + M_1 = M(\tilde{\kappa}(z,t)),$$

可见 $\tilde{\kappa}(z,t)$ 满足条件(7a).

注意到 $\{\varphi_n\}$ 在 Ω_0 上一致收敛于 φ_0, 故对于充分大的 A 和 n, 有 $|\varphi_n(z)| \le A|\varphi_0(z)|$. 这里 $z \in \Omega_0$. 因此, 对于充分大的 A 和 n, 当 $z \in \Omega(n,A)$ 时, $\tilde{\kappa}(z,t) = \kappa_f(z)$, 所以

$$\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\tilde{\kappa}\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 κ_f 满足条件(10), 立即可得 $\tilde{\kappa}(z,t)$ 也满足条件(10).

现在证明 $\tilde{\kappa}(z,t)$ 是极值拟共形映照的复特征. 事实上, 由于 $\delta\{\tilde{\kappa},\varphi_n\} < M(\tilde{\kappa}(z,t))$, $\|\varphi_n\| \to \infty$, $(n\to\infty)$. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\delta\{\tilde{\kappa},\varphi_n\}}{\|\varphi_n\|} = 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\mathrm{Re}\iint_{\Omega}\tilde{\kappa}\varphi_n\mathrm{d}x\mathrm{d}y)/\|\varphi_n\|\right] = k$. 由一映照是极值映照的充要条件可知, $\tilde{\kappa}(z,t)$ 是极值拟共形映照的复特征. 引理获证.

注　证明 $\tilde{\kappa}(z,t)$ 满足条件(4),(7a)和(10), 并不需要 $\|\varphi_n\| \to \infty$, $(n\to\infty)$.

我们进行定理的证明. (1) 先证必要性. 设 $g \in Q(\{\varphi_n\})$, $k = \|\kappa_f\|_\infty$. 由引理必存在非 Teichmüller 映照 f, $f \in Q(\{\varphi_n\})$, $k = \|\kappa_f\|_\infty$. 选取集列 Ω_m, 满足 $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega_m = \Omega$, 使得 $|\kappa_f| \ne k$, $a.e.\ z \in \Omega\backslash\Omega_m$, $m = 1, 2, \cdots$. 置

$$\kappa_{f_m}(z) = \begin{cases}\kappa_f(z), & z \in \Omega\backslash\Omega_m,\\ \kappa_g(z), & z \in \Omega_m,\end{cases}$$

则 f_m 不为 Teichmüller 映照, 对一切 m 成立. 由 $\kappa_{f_m}(z)$ 的构造知(11)成立.

由已知 $g \in Q(\{\varphi_n\})$, 故有

$$\delta\{\kappa_{f_m},\varphi_n\} = \iint_{\Omega}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_{f_m}\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint_{\Omega\backslash\Omega_m}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega_m}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_g\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le$$

$$\delta\{\kappa_f,\varphi_n\} + \delta\{\kappa_g,\varphi_n\} \le M(\kappa_f) + M(\kappa_g) = \tilde{M}(\kappa_g),$$

因而式(12)成立. 注意到

$$\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_{f_m}\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint_{\Omega(n,A)\backslash\Omega_m}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega(n,A)\cap\Omega_m}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_g\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le$$

$$\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_g\varphi_n)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

因为 κ_f, κ_g 满足条件(10)，因而式(13)成立．$g \in Q(\{\varphi_n\})$ 是显然的，必要性获证．(2) 再证充分性．κ_g 满足条件(4)是已知的假设，利用 Fatou 引理，便有

$$\iint_{\Omega} \underline{\lim}_{n\to\infty}[k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_{f_m}\varphi_n)]\,dx\,dy \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\delta\{\kappa_{f_m}\varphi_n\}.$$

结合条件(11)，(12)，便有

$$\delta\{\kappa_g, \varphi_n\} < \tilde{M}(\kappa_g),\ n = 1, 2, \cdots.$$

记 $M(\kappa_g) = \tilde{M}(\kappa_g)$，即有 κ_g 满足条件(7a)．

$\forall\, \epsilon > 0$，由条件(3)可知，存在正整数 n_0，正数 A_0，使得当 $n > n_0$，$A > A_0$ 时，有

$$\iint_{\Omega(n,A)} [k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_{f_m}\varphi_n)]\,dx\,dy < \epsilon$$

对一切 m 成立．条件(11)及 Fatou 引理给出

$$\iint_{\Omega(n,A)} [k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(\kappa_g\varphi_n)]\,dx\,dy < \epsilon,$$

对于 $n > n_0$ 及 $A > A_0$ 成立．根据二重极限的定义，易知 κ_g 满足条件(10)．充分性获证．

参　考　文　献

1　Reich E. A criterion for unique extremality of Teichmüller mappings[J]. India Univ. Math. J., 1981, 30: 411～447

2　刘金雄. Reich 的一个定理的改进及其相关问题[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2000, 21(1): 8～10

3　Reich E. On criteria for unique extremality of Teichmüller mappings[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 1981, (6): 289～301

4　刘增荣. Reich 的一个定理的改进[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(1): 1～5

5　刘金雄．一类唯一极值 Teichmüller 映照的判别法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2000, 21(4): 331～336

Existence of a Class of Uniquely Extremal Teichmüller Mappings

Liu Jinxiong

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　The author obtains a necessary and sufficient condition for every Teichmüller mapping $g \in Q(\{\varphi_n\})$.

Keywords　quasiconformal mapping, extremal mapping, uniquely extremal mapping, Teichmüller mapping, complex dilatation

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w