第 22 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 22　No. 1
2001 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2001

文章编号　1000-5013(2001)01-001-05

微分积分方程的概周期解的存在唯一性

王　全　义

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要　研究一类具有无限时滞的非线性微分积分方程, 其概周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题. 利用不动点方法, 得到一些关于该方程的概周期解的存在性、唯一性及稳定性的新结果.

关键词　无限时滞, 微分积分方程, 概周期解, 存在性, 唯一性, 稳定性

中图分类号　O 241. 8　　　　文献标识码　A

文[1,2]研究过如下的 Volterra 微分积分方程. 即

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{\infty} C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + f(t), \tag{1}$$

的周期解的存在性问题. 文[3,4]研究过方程(1)的概周期解的存在性问题. 本文将研究比方程(1)更为广泛的一类非线性微分积分方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{\infty} C(t,s)g[s,x(s)]\,\mathrm{d}s + f(t,x(t)), \tag{2}$$

其概周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题. 在式(2)中, $x\in R^n$, $t\in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$, $\boldsymbol{C}(t,s)=(C_{ij}(t,s))_{n\times n}$, 都是 $n\times n$ 连续函数矩阵; $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上连续, $\boldsymbol{C}(t,s)$ 在 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 上连续; g, $f:\boldsymbol{R}\times R^n\to R^n$ 连续. 利用不动点方法, 得到了该方程的概周期解的存在性、唯一性及稳定性的一些新结果. 我们的结果, 推广了文[1]中的有关结果.

1　主要结果

对于方程(2), 我们假设有 7 个条件. (1) $\boldsymbol{A}(t)$ 是 t 的概周期函数. $g(t,x)$, $f(t,x)$ 关于 t 对 $x\in B_1$ 是一致概周期的, 其中 B_1 为 R^n 中的任一紧子集. $\boldsymbol{C}(t,t+s)$ 关于 t 对 $s\in B_2$ 是一致概周期的, 其中 B_2 为 $\boldsymbol{R}$ 中的任一紧子集. (2) $\boldsymbol{C}(t,s)$ 满足两个条件. (a) $\int_{\infty}\|\boldsymbol{C}(t,s)\|\,\mathrm{d}s$ 有界. (b) 对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在着 $L=L(\epsilon)>0$, 使得对任意的 $t\in\boldsymbol{R}$, 有 $\int_{\infty}^{L}\|\boldsymbol{C}(t,s)\|\,\mathrm{d}s<\epsilon$. (3) 存在非负的概周期函数的 $b_1(t)$ 及 $b_2(t)$, 使得对 $\forall t\in\boldsymbol{R}, \forall x,y\in R^n$. 它们都有 $\|g(t,x)-g(t,y)\|\le b_1(t)\|x-y\|$, $\|f(t,x)-f(t,y)\|\le b_2(t)\|x-y\|$. (4) n 阶对称概周期

收稿日期　2000-09-11　　作者简介　王全义(1955-), 男, 教授
基金项目　福建省自然科学基金资助项目

函数方阵$[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^*(t)]/2$最大特征根$a_1(t)\le 0$,且$a_1(t)$平均值$M[a_1(t)]\triangleq\lim_{t-s\to+\infty}\frac{1}{t-s}\cdot\int a_1(\tau)\mathrm{d}\tau=-c_1<0$.(5) 存在着常数$k_1>1$,使得当$t\in\boldsymbol{R}$时,有

$$a_1(t)+k_1\left[\int_{-\infty}\|\boldsymbol{C}(t,s)\|b_1(s)\mathrm{d}s+b_2(t)\right]\le 0.$$

(6) n阶对称概周期函数方阵$(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^*(t))/2$的最小特征根$a_2(t)\ge 0$,且它的平均值为

$$M[a_2(t)]\triangleq\lim_{t-s\to+\infty}\frac{1}{t-s}\int_s a_2(\tau)\mathrm{d}\tau=c_2>0.$$

(7) 存在着$k_2>1$,使得当$t\in R$时,有

$$a_2(t)-k_2\left[\int_{-\infty}\|\boldsymbol{C}(t,s)\|b_1(s)\mathrm{d}s+b_2(t)\right]\ge 0.$$

注1. 因为$[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^*(t)]/2$是概周期函数方阵,故它的最大及最小特征根也是概周期函数.因此,它们的平均值都存在.方程(2)的具有有界连续初始函数$\varphi:(-\infty,t_0]\to R^n$的解,将表示为$x(t,t_0,\varphi)$或$x(t,\varphi)$或$x(t)$(如果不会出现混淆的话).

定义1 方程(2)的解$x(t,t_0,\varphi)$,称为一致稳定.如果对于每一个$\epsilon>0$和$\forall t_0\ge 0$,存在着正数$\delta=\delta(\epsilon)$(与t_0无关),使得当$\|\varphi-\psi\|<\delta$(其中$\varphi,\psi\in BC(-\infty,t_0)$)时,有

$$\|x(t,t_0,\varphi)-x(t,t_0,\psi)\|<\epsilon,(t\ge t_0).$$

定理1 若条件(1)~(5)被满足,则方程(2)存在着唯一的、一致稳定的概周期解.

推论1 如果$\boldsymbol{A}(t)$,$g(t,x)$,$f(t,x)$及$\boldsymbol{C}(t,t+s)$,都是t的连续ω-周期函数,且条件(2)~(5)被满足.那么方程(2)存在唯一的、一致稳定的ω-周期解.

注2. 推论1大大推广了文[1]中的定理5.

定理2 如果条件(1)~(3),(6),(7),被满足,则方程(2)存在着唯一的概周期解.

推论2 如果$\boldsymbol{A}(t)$,$g(t,x)$,$f(t,x)$及$\boldsymbol{C}(t,s)$,都是t的连续ω-周期函数,且条件(2),(3),(6)和(7)被满足.那么,方程(2)存在着唯一的ω-周期解.

2 一些引理

本节介绍一些有用的引理.考虑如下微分方程

$$x'(t)=\boldsymbol{A}(t)x(t),\tag{3}$$

$$x'(t)=\boldsymbol{A}(t)x(t)+\int_{-\infty}\boldsymbol{C}(t,s)g_1(s)\mathrm{d}s+g_2(t),\tag{4}$$

在式(3),(4)中,t,x,$\boldsymbol{A}(t)$和$\boldsymbol{C}(t,s)$如前所述,$g_1(t)$和$g_2(t)$都是t的n维概周期函数.

引理1 设$\boldsymbol{X}(t)$是方程(3)的一个基本解方阵,则有

$$\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\|\le\exp\left[\int_s a_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right],\quad(t\ge s),\tag{5}$$

$$\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\|\le\exp\left[\int_s a_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right],\quad(s\ge t),\tag{6}$$

其中$a_1(t)$,$a_2(t)$分别是$[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^*(t)]/2$的最大、最小特征根.这个引理,它就是文[5]中的引理1.

引理2 设$\boldsymbol{A}(t)$满足条件(1)和(4),$\boldsymbol{C}(t,s)$满足条件(1)和(2),则方程(4)存在着唯一的

概周期解 $x(t)$. 它可表示为

$$x(t)=\int_{\infty}X(t)X^{-1}(r)\Big[\int_{\infty}C(r,s)g_1(s)\,\mathrm{d}s+g_2(r)\Big]\mathrm{d}r, \tag{7}$$

其中 $X(t)$ 为方程(3) 的一个基本解方阵.

证明　由条件(1), (4) 及引理 2.5[6], 可知, 存在着正常数 α_1,β_1 使得

$$\exp\Big(\int a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\leq\beta_1\exp[-\alpha_1(t-s)],(t\geq s). \tag{8}$$

再由引理 1 可得知方程(3) 具有指数型二分性. 由于 $C(t,s)$ 满足条件(1), (2), 因此易证 $\int_{\infty}C(t,s)g_1(s)\,\mathrm{d}s$ 是 t 的概周期函数. 又由定理 7.7[7] 及其证明, 可知方程(4) 存在着唯一的概周期解 $x(t)$. 它可表示为

$$x(t)=\int_{\infty}X(t)X^{-1}(s)\Big[\int_{\infty}C(r,s)g_1(s)\,\mathrm{d}s+g_2(r)\Big]\mathrm{d}r, \tag{9}$$

其中 $X(t)$ 为方程(3) 的一个基本解方阵. 引理 2 证毕.

完全类似于引理 2 的证明, 可以证明下列引理 3. 此处证明从略.

引理 3　设 $A(t)$ 满足条件(1) 和(5), $C(t,s)$ 满足条件(1) 和(2), 则方程(4) 存在着唯一的概周期解 $x(t)$. 它可表示为

$$x(t)=-\int_{t}^{\infty}X(t)X^{-1}(r)\Big[\int_{\infty}C(r,s)g_1(s)\,\mathrm{d}s+g_2(r)\Big]\mathrm{d}r, \tag{10}$$

其中 $X(t)$ 为方程(3) 的一个基本解方阵.

3　定理的证明

3.1　定理 1 的证明

记 $D=\{u\,|\,u(t):\boldsymbol{R}\to R^n$ 为概周期函数$\}$, 则 D 在范数 $\|u\|=\sup\limits_{t\in\boldsymbol{R}}\{\|u(t)\|\}$ 下是一个 Banach 空间. 对任意的 $u\in D$, 由于 $\Big[\int_{\infty}C(t,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s+f(t,u(t))\Big]$ 是概周期函数, 从而由引理 2 可知

$$x_u(t)\triangleq\int_{\infty}X(t)X^{-1}(r)\Big[\int_{\infty}C(r,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s+f(r,u(r))\Big]\mathrm{d}r \tag{11}$$

是概周期函数. 现在作映射 $T:D\to D$ 为

$$Tu(t)=x_u(t),\qquad(\forall\,u\in D). \tag{12}$$

下面证明 $T:D\to D$ 是一个压缩映射. 事实上, 对任意的 $u,v\in D$, 由式(8), (10), (11), (12) 及定理的条件及引理 1, 我们有

$$\begin{aligned}\|Tu(t)-Tv(t)\|\leq&\int_{\infty}\|X(t)X^{-1}(r)\|\Big[\int_{\infty}C(r,s)\|\cdot\|g(s,u(s))-\\&g(s,v(s))\|\,\mathrm{d}s+\|f(r,u(r))-f(r,v(r))\|\Big]\mathrm{d}r\leq\\&\int_{\infty}\exp\Big(\int a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\Big[\int_{\infty}\|C(r,s)\|\cdot b_1(s)\|u(s)-v(s)\|\,\mathrm{d}s+\\&b_2(r)\|u(r)-v(r)\|\Big]\mathrm{d}r\leq\end{aligned}$$

$$\| u - v \| \int_{-\infty} \exp\left(\int a_1(\tau)\,d\tau\right)\left[\int_{-\infty} \| \boldsymbol{C}(r, s) \| b_1(s)\,ds + b_2(r)\right] dr \le$$

$$\| u - v \| \int_{-\infty} \exp\left(\int a_1(\tau)\,d\tau\right)\left(-\frac{a_1(r)}{K_1}\right) dr = \frac{\| u - v \|}{K_1}. \tag{12}$$

即有

$$\| Tu - Tv \| \le \frac{\| u - v \|}{K_1}. \tag{13}$$

因为 $K_1 > 1$, 即 $\frac{1}{K_1} < 1$, 所以算子 T 在 D 中是可压缩的. 从而, 算子 T 在 D 中具有唯一的不动点 $x \in D$, 使得 $Tx(t) = x(t)$, $(t \in \boldsymbol{R})$ 即.

$$x(t) = \int_{-\infty} \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\left[\int_{-\infty} \boldsymbol{C}(r, s) g(s, x(s))\,ds + f(r, x(r))\right] dr. \tag{14}$$

由式(14)的右边即知 $x(t)$ 是连续可微的, 直接从式(14)的两边对 t 求导即知 $x(t)$ 是方程(2)的解. 因此, 方程(2)具有唯一的概周期解.

下面证明方程(2)的解是一致稳定的. 由常数变易法可知, 对任意给定的 φ 及 $\psi \in BC(-\infty, t_0]$, 方程(2)具有初始函数 φ 及 ψ 的解 $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ 和 $y(t) = y(t, t_0, \psi)$. 它们可表示为

$$x(t, t_0, \varphi) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\varphi(t_0) + \int_{0} \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\left[\int_{-\infty} \boldsymbol{C}(r, s) g(s, x(s))\,ds + f(r, x(r))\right] dr, \ (t \ge t_0), \tag{15}$$

$$y(t, t_0, \psi) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\psi(t_0) + \int_{0} \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\left[\int_{-\infty} \boldsymbol{C}(r, s) g(s, y(s))\,ds + f(r, y(r))\right] dr, \ (t \ge t_0), \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{X}(t)$ 为方程(3)的一个基本解方阵. 于是, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 取正数 $\delta = \frac{\epsilon}{K_1}$ (K_1 为条件(5)给出), 则当 $\| \varphi - \psi \| < \delta$ 时, 必有

$$\| x(t, t_0, \varphi) - y(t, t_0, \psi) \| < \epsilon, \ (t \ge t_0). \tag{17}$$

否则的话, 必存在 $t_1 > t_0$, 使得当 $t_0 < t < t_1$ 时, 有

$$\| x(t, t_0, \varphi) - y(t, t_0, \psi) \| < \epsilon, \tag{18}$$

$$\| x(t_1, t_0, \varphi) - y(t_1, t_0, \psi) \| = \epsilon. \tag{19}$$

因为 $K_1 > 1$, 故 $\delta < \epsilon$. 又由式(15), (16)和定理的条件及引理 2.5 [6], 我们有

$$\epsilon = \| x(t_1, t_0, \varphi) - y(t_1, t_0, \psi) \| \le$$

$$\| \boldsymbol{X}(t_1)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0) \| \cdot \| \varphi(t_0) - \psi(t_0) \| + \int_{0}^{1} \| \boldsymbol{X}(t_1)\boldsymbol{X}^{-1}(r) \| \cdot$$

$$\left[\int_{-\infty} \| \boldsymbol{C}(r, s) \| \cdot \| g(s, x(s)) - g(s, y(s)) \| ds +\right.$$

$$\left.\| f(r, x(r)) - f(r, y(r)) \| \right] dr \le$$

$$\exp\left(\int_{0}^{1} a_1(\tau)\,d\tau\right)\delta + \int_{0}^{1} \exp\left(\int^{1} a_1(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_{-\infty} \| \boldsymbol{C}(r, s) \| \cdot\right.$$

$$\left. b_1(s) \| x(s) - y(s) \| ds + b_2(r) \| x(r) - y(r) \| \right] dr \le$$

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t_1} a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\delta+\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\exp\left(\int_{r}^{t_1} a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{r}\|\boldsymbol{C}(r,s)\|\cdot\right.$$

$$\left. b_1(s)\,\mathrm{d}s+b_2(r)\right]\mathrm{d}r\leq$$

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t_1} a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\delta+\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\exp\left(\int_{r}^{t_1} a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(-\frac{a_1(r)}{K_1}\right)\mathrm{d}r=\frac{\epsilon}{K_1}<\epsilon.$$

这就发生了矛盾．这个矛盾说明式(17)成立．因此方程(2)的解是一致稳定的．定理1证毕．

3.2　推论 1 的证明

在推论 1 的条件下, 此时定理 1 的所有条件都成立．因此, 由定理 1 知方程(2)存在着唯一的、一致稳定的概周期解 $x(t)$．而 $x(t+\omega)$ 仍是概周期函数, 且容易验证它也是方程(2)的解．因此, 由概周期解的唯一性可知必有 $x(t)=x(t+\omega)$, 即 $x(t)$ 是方程(2)的唯一的、一致稳定的 ω-周期解．推论 1 证毕．

3.3　定理 2 的证明

利用引理 1 及 3, 此定理的证明同定理 1 第 1 部分的证明完全类似．此处证明从略．

3.4　推论 2 的证明

同推论 1 的证明完全类似．此处证明从略．

参　考　文　献

1　黄启昌．具有无限时滞的泛函微分方程周期解的存在性[J]．中国科学(A 辑), 1984, 10: 882～889

2　王全义．具有无限时滞的微积分方程的周期解的存在性与唯一性[J]．华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 336～340

3　Hino Y, Murakami S. Stability properties of linear Volterra equations[J]. J. of Diff. Eqs., 1991, 89(1): 121～137

4　Hino Y. Almost periodic solutions of a linear Volterra systerm[J]. J. Differential Equations and Integral Equations, 1990, 3: 495～501

5　王全义．一类周期微分系统的周期解[J]．华侨大学学报(自然科学版), 1993, 14(1): 12～19

6　王全义．概周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]．数学学报, 1997, 40(1): 80～89

7　Fink A M. Almost periodic differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1974. 125～127

Existence and Uniqueness of Almost Periodic Solution to Integrodifferential Equation

Wang Quanyi

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A study is made on existence and uniqueness and stability of almost periodic solutions to a class of nonlinear integrodifferential equations with finite time lag. By using fixed point method, the author obtains some new results on existence and uniqueness and stability of almost periodic solutions to those equations.

Keywords　infinite time lag, integrodifferential equation, almost periodic solution, existence, uniqueness, stability