第 21 卷 第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 21 No. 4
2000 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 2000

文章编号 1000-5013(2000) 04-354-03

两个重要不等式的证明方法

邱 秀 环

(泉州师范学院数学系, 泉州 362000)

摘要　对两个绝对不等式, 摒弃各种初等证法, 给出微分的 3 种方法进行论证.

关键词　数学分析, 绝对不等式, 微分方法

中图分类号　TU 413.4: TU 248.6　　文献标识码　A

不等式的证明, 除了各种初等证法之外, 还可用微分方法. 对此, 有不少文章在这些方面作了介绍. 本文在这里仅补充介绍 3 种方法证明下面两个绝对不等式[1].

定理　设 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n, n \in N$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) / n \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}; \left(\sum_{i=1}^{n} a_i / n\right)^r \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right) / n (r \geq 1). \tag{1}$$

证法 **1**　利用泰勒(Taylor)公式

(1) 令 $f(x) = -\ln x \cdot \forall x \in (0, +\infty)$, 有 $f''(x) = 1/x^2 > 0$. 将 $f(x)$ 在点 $x_0 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$ 处展开, 有

$$f(a_i) = f(x_0) - f'(x_0)(a_i - x_0) + \frac{f''(\zeta_i)}{2!}(a_i - x_0)^2,$$

其中 ζ 在 x_0 与 a_i 之间, $i = 1, 2, \cdots, n$. 已知 $\forall x \in (0, +\infty)$, 有 $f''(x) > 0$, 所以 $f''(\zeta) > 0$, 从而 $f(a_i) \geq f(x_0) + f'(x_0)(a_i - x_0)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 将上式不等号两端分别相加, 有

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq n f(x_0) + f'(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - n x_0\right).$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} a_i - n x_0 = 0$, 所以 $\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq n f(x_0)$, 即 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(a_i) \geq f(x_0)$. 于是, 有 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(-\ln a_i) \geq -\ln x_0$. 根据对数运算性质, 有 $-\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \geq -\ln x_0$. 也即 $\ln x_0 \geq \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, 故

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_n\right) / n \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}.$$

(2) 令 $f(x) = x^r \cdot \forall x \in (0, +\infty)$, 有 $f''(x) = r(r-1)x^{r-2} \geq 0$. 将 $f(x)$ 在点 $x_0 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$ 处展开, 有

$$f(a_i) = f(x_0) + f'(x_0)(a_i - x_0) + \frac{f''(\zeta_i)}{2!}(a_i - x_0)^2,$$

收稿日期　1999-12-01　　作者简介　邱秀环(1949-), 女, 讲师

其中 ζ 在 x_0 与 a_i 之间, $i=1,2,\cdots,n$. 已知 $\forall x\in(0,+\infty)$, 有 $f''(x)\geq 0$, 所以 $f''(\zeta)>0$, 从而 $f(a_i)\geq f(x_0)+f'(x_0)(a_i-x_0)$, $i=1,2,\cdots,n$. 将上式不等号两端分别相加, 有

$$\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\geq nf(x_0)+f'(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-nx_0\right).$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}a_i-nx_0=0$, 所以 $\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\geq nf(x_0)$, 即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(a_i)\geq f(x_0)$. 于是有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i^r\geq x_0^r$, 即

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)/n\right]^r\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)/n\ (r\geq 1).$$

证法**2**　利用詹生(Jensen)不等式[2], 如果 $f(x)$ 在区间 I 存在二阶导数, 且 $\forall x\in$ I, 有 $f''(x)\geq 0$. 因此有 $f\left(\sum_{i=1}^{n}q_ix_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}q_if(x_i)$, 其中 $x_i\in$ I, $q_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 且 $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$.

(1) 设 $f(x)=-\ln x\cdot\forall x\in(0,+\infty)$, 有 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$. 取 $x_i=a_i\in(0,+\infty)$, $q_i=\frac{1}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$, 有

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(-\ln a_i).$$

于是, $\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\right)\geq\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/n}$, 即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/n}.$$

(2) 设 $f(x)=x^r\cdot\forall x\in(0,+\infty)$, 有 $f''(x)=r(r-1)x^{r-2}\geq 0$. 取 $x_i=a_i\in(0,+\infty)$, $q_i=\frac{1}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$, 有 $f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(a_i)$. 因此, $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i\right)^r\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i^r$, 即

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)/n\right]^r\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)/n\ (r\geq 1).$$

证法 **3**　利用拉格朗日(Lagrange) 乘数法[3]

(1) 设 $\sum_{i=1}^{n}a_i-b=0$, 并设 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1a_2\cdots a_n=A$. 引入常数因子 λ(λ 仅为简化演算手续, 对所讨论的问题不起作用), 作辅助函数

$$\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1a_2\cdots a_n+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right).\tag{2}$$

求 $\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的驻点(或称稳定点), 使 $\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}=\frac{A}{a_i}+\lambda=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 将此式联立解得 $a_1=a_2=\cdots=a_n$, 代入 $\sum_{i=1}^{n}a_i-b=0$ 中, 只有一个驻点$(\underbrace{\frac{b}{n},\frac{b}{n},\cdots,\frac{n}{b}}_{n项})$. 由于 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_i^2}=-\frac{A}{a_i^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_i\partial a_j}=0$ $(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$, $d^2\varphi=-A\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}da_i^2<0$, 所以$(\underbrace{\frac{b}{n},\frac{b}{n},\cdots,\frac{n}{b}}_{n项})$是极大值点, 且驻点仅有一个.

因此有

$$\max f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\max(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)=\left(\frac{b}{n}\right)^n.$$

于是有 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{b}{n}$, 即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(2) 设 $\sum_{i=1}^{n} a_i - b = 0$. 并设 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}$. 仿(1)作辅助函数, 有

$$\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right). \tag{3}$$

求 $\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的驻点, 使

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = \frac{r a_i^{r-1}}{n} + \lambda = 0 (i = 1, 2, \cdots, n).$$

将此式联立解得 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, 代入 $\sum_{i=1}^{n} a_i - b = 0$ 中, 只有一个驻点$(\underbrace{\frac{b}{n}, \frac{b}{n}, \cdots, \frac{n}{b}}_{n项})$. 由于 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_i^2} = \frac{r(r-1)a_i^{r-2}}{n}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_i \partial a_j} = 0 (i, j = 1, 2, \cdots, n; i \neq j)$, $d^2\varphi = \frac{r(r-1)}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{r-2} d a_i^2 > 0$, 所以 $(\underbrace{\frac{b}{n}, \frac{b}{n}, \cdots, \frac{n}{b}}_{n项})$ 是极小值点, 且驻点仅有一个. 因此有

$$\min f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \min\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^r.$$

也就是说

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^r (r \geq 1).$$

参 考 文 献

1 中国矿业学院数学教研室编. 数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 1980. 4～5

2 刘玉琏, 傅沛仁. 数学分析讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992. 256～257

3 郑英元, 毛羽辉, 宋国栋. 数学分析[M]. 上海: 高等教育出版社, 1990. 142～145

Method of Proving Two Important Inequalities

Qiu Xiuhuan

(Dept. of Math., Quanzhou Normal College, 362000, Quanzhou)

Abstract For proving two absolute inequalities, three methods of differentiation are given while various methods of elementary proving are rejected.

Keywords mathematical analysis, absolute inequalities, method of differentiation