

文章编号 1000-5013(2000)04-331-06

一类唯一极值 Teichmüller 映照的判别法

刘 金 雄

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 给出一类唯一极值 Teichmüller 映照的判别法, 去掉已有的相关结果中关于 $\mathcal{Q} \in L^1_{loc}(\Omega)$ 的假设.

关键词 拟共形映照, 极值映照, 唯一极值映照, Teichmüller 映照, 复特征

中图分类号 O 174.55

文献标识码 A

1 主要结果

记 Ω 是复平面 \mathbb{C} 上边界多于一点的一个区域, f 为 Ω 上的一个拟共形映照, \mathcal{Q} 表示 Ω 上与 f 有相同边界值且同伦的拟共形映照全体所组成的类. 对任一 $g \in \mathcal{Q}$, 置

$$K_g(z) = g\bar{z}/gz, \quad K_g = \operatorname{ess\,sup}_z |K_g(z)|. \quad (1)$$

f 是极值的, 指 $K_f = \inf_{g \in \mathcal{Q}_f} K_g$. 若这样的 f 是唯一的, 则说 f 是唯一极值映照.

若拟共形映照的复特征具有形式

$$K(z) = f\bar{z}/fz = k\mathcal{Q}/|\mathcal{Q}|, \quad a.e., \quad (2)$$

其中 k 为常数, $0 < k < 1$, $\mathcal{Q} \neq 0$, $a.e.$ 当 \mathcal{Q} 为 Ω 上的可测函数时, 称 f 为关于 \mathcal{Q} 的 Teichmüller 映照; 当 \mathcal{Q} 在 Ω 上解析时, 称 f 为关于 \mathcal{Q} 的正则 Teichmüller 映照.

$\beta(\Omega)$ 表示 $L^1(\Omega)$ 中的解析函数的全体所组成的 Banach 空间, $\mathcal{P} \subset \beta(\Omega)$, 其范数 $\|\mathcal{P}\| =$

$\iint_{\Omega} |\mathcal{P}(z)| dx dy < \infty$. 对于 $\mathcal{P} \in \beta(\Omega)$, 记

$$\delta(K, \mathcal{P}) = k\|\mathcal{P}\| - \operatorname{Re} \iint_{\Omega} K \mathcal{P} dx dy, \quad (3)$$

其中 $k = K_f$. 1981~1989 年, Reich 等人证明了如下定理 $A \sim D^{0.41}$.

定理 A 设 f 为关于 \mathcal{Q} 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\mathcal{Q}_n\} \subset \beta(\Omega)$, 使

$$\lim_n \mathcal{Q}_n(z) = \mathcal{Q}(z), \quad a.e., \quad (4)$$

$$\lim_n \delta(K, \mathcal{Q}_n) = 0, \quad (5)$$

则 f 是唯一极值映照. 事实上, 式(4), (5)隐含了 f 为 Teichmüller 映照这一假设, 即有

定理 B 设 f 为 Ω 上的一个拟共形映照, $K_f = k$. 若存在函数列 $\{\mathcal{Q}_n\} \subset \beta(\Omega)$, 满足式

(4), (5), 其中 $\varphi \neq 0$, $a.e.$, 则 $\kappa(z) = k\varphi/|\varphi|$, $a.e.$, 且 $f(z)$ 是唯一极值映照.

定理 C 设 f 为关于 φ 的 Teichmüller 映照. 若存在函数列 $\{\varphi_n\}$, 它满足

$$\lim_n \varphi_n(z) = \varphi(z), \quad a.e., \quad z \in \Omega, \quad \varphi \in L^1_{loc}(\Omega), \quad (6)$$

$$\delta\{\kappa, \varphi_n\} \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$\lim_A \iint_{\Omega(n, A)} |\varphi_n(z)| \, dx \, dy = 0 \quad (8)$$

对 n 一致. 在上式中, $\Omega(n, A) = \{z \in \Omega \mid |\varphi(z)| > A \mid \varphi(z)|\}$, 则 f 是唯一极值映照. 定理 C 可改进为

定理 D 设 f 为关于 φ 的 Teichmüller 映照. 若存在函数列 $\{\varphi_n\} \subset \beta(\Omega)$, 它满足式(6)和式(7), 以及

$$\lim_A \iint_{\Omega(n, A)} [k|\varphi_n| - \operatorname{Re}(\kappa\varphi_n)] \, dx \, dy = 0 \quad (9)$$

对 n 一致. 式(9)的 $\Omega(n, A)$ 与式(8)中的相同, 则 f 是唯一极值映照.

本文将证明定理 C 与定理 D 中, 关于 φ 的局部可积性的假设是多余的. 即我们有

定理 1 设 f 为关于 φ 的 Teichmüller 映照. 若存在函数列 $\{\varphi_n\} \subset \beta(\Omega)$,

它满足式(4)和式(7), 以及

$$\lim_n \iint_{\Omega(n, A)} [k|\varphi_n| - \operatorname{Re}(\kappa\varphi_n)] \, dx \, dy \quad (10)$$

存在. 其中, $\Omega(n, A)$ 与式(8)中的相同, 则 f 是唯一极值映照. 严格地说, 式(7)应写成

$$\delta\{\kappa, \varphi_n\} < M(\kappa), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7a)$$

注 1 引理 3 后的注将指出, 式(9), (10)是等价的. 故容易看出定理 A, C, D 包含在定理 1 中, 但定理 A 与定理 C, D 却不相包含.

注 2 定理 B 指出, 式(4)和(5)隐含着 $\kappa(z) = k\varphi(z)/|\varphi(z)|$. 下面节 3 中的定理 2 将指出, 式(4), (7)或式(7a)和式(10)却不隐含着 $\kappa(z) = k\varphi(z)/|\varphi(z)|$.

2 定理 1 的证明

引理 1 设 F 是区域 H 到 Ω 的共形映照, f 是 Ω 上的 Teichmüller 映照, 满足定理 1 中的一切条件. 因此, $h(\zeta) = f \circ F(\zeta)$ 是 H 中的一个 Teichmüller 映照, 且式(4), (7)和式(10)具有相应的不变性.

证明 由复合函数的复特征的计算法则^[6]可知, $\kappa(\zeta) = \overline{kF'(\zeta)^2 \varphi(F(\zeta))} / F'(\zeta)^2 \cdot \varphi(F(\zeta))$. 因此, $h(\zeta) = f \circ F(\zeta)$ 是一个 Teichmüller 映照. 令

$$\varphi_n(\zeta) = \varphi_n(F(\zeta)) F'(\zeta)^2, \quad (11)$$

$$\varphi(\zeta) = \varphi(F(\zeta)) F'(\zeta)^2. \quad (12)$$

显然, $\varphi_n(\zeta) \in \beta(H)$. 由式(4), (11)和式(12)可得

$$\lim_n \varphi_n(\zeta) = \varphi(\zeta), \quad a.e., \quad \zeta \in H. \quad (13)$$

注意到 $dx \, dy = |F'(\zeta)|^2 d\xi \, d\eta$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. 由式(11), (12)可得

$$\begin{aligned}\delta\{\kappa_n, \mathcal{Q}\} &= \iint_D [k|\mathcal{Q}_n(\zeta)| - \operatorname{Re}(\kappa_n(\zeta)\mathcal{Q}_n(\zeta))] d\xi d\eta = \\ &= \iint_D [k|\mathcal{Q}_n(F(\zeta)) \cdot F(\zeta^2)| - \operatorname{Re}[k \frac{\overline{F(\zeta^2)\mathcal{Q}_n(F(\zeta))}}{F(\zeta^2)\mathcal{Q}_n(F(\zeta))} \cdot \mathcal{Q}_n(F(\zeta))F(\zeta^2)]] d\xi d\eta = \\ &= \iint_D [k|\mathcal{Q}_n(z)| - \operatorname{Re}(k\mathcal{Q}_n/\overline{\mathcal{Q}_n} \cdot \mathcal{Q}_n)] dx dy = \delta\{\kappa_n, \mathcal{Q}_n\},\end{aligned}$$

亦即

$$\delta\{\kappa_n, \mathcal{Q}_n\} = \delta\{\kappa_n, \mathcal{Q}_n\}. \quad (14)$$

同样的理由表明

$$\iint_{\Omega(n,A)} \{k|\mathcal{Q}_n(\zeta)| - \operatorname{Re}[\kappa_n(\zeta)\mathcal{Q}_n(\zeta)]\} d\xi d\eta = \iint_{\Omega(n,A)} \{k|\mathcal{Q}_n(z)| - \operatorname{Re}[\kappa_n(z)\mathcal{Q}_n(z)]\} dx dy, \quad (15)$$

其中 $\Omega(n,A) = \{\zeta \in H \mid |\mathcal{Q}_n(\zeta)| > A\}$. 引理证毕.

引理 2 设 $m(\Omega) < \infty$, 选取 Ω 的一列子集 $\{\Omega_n\}$, 使得 $\{\mathcal{Q}_n\}$ 在每个 Ω_n 上一致收敛于 \mathcal{Q} , 且 $m(\Omega \setminus \Omega_n) < 1/m$.

这是因为 \mathcal{Q} 几乎处处有限. 所以, 引理 2 是 EropoB 定理的结论.

引理 3 若 $\mathcal{Q} \in \beta(\Omega)$, 且式 (10) 存在, 则其值为 0.

证明 对任何固定的 n , $\mathcal{Q}_n(z)/\mathcal{Q}(z)$ 几乎处处有限. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} [\Omega(n,A)] = 0$. 由积分的绝对连续性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega(n,A)} \{k|\mathcal{Q}_n(z)| - \operatorname{Re}[\kappa_n(z)\mathcal{Q}_n(z)]\} dx dy = 0.$$

由二重极限和二次极限的关系可知, 式 (10) 的值为 0. 引理证毕.

注 显然, 式 (9) 可导出式 (10). 由引理 3 的证明过程可看出, 式 (10) 也可导出式 (9). 因此, 式 (9), (10) 是等价的.

下面我们给出定理 1 的证明.

可假定 $m(\Omega) < \infty$. 若不然 $m(\Omega) = \infty$, 由于 Ω 的边界多于一点, 总可以作一共形映照 F , 把位于单位圆内的区域 H 映成 Ω . 由引理 1 可知, 式 (4), (7) 和式 (10) 是共形不变量, 其复合映照仍为 Teichmüller 映照, 故只要在 H 中考虑相应的问题即可. 从而可假定 $m(\Omega) < \infty$.

设 $w = f(z)$ 是 Ω 上的一个 Teichmüller 映照, 其复特征 $\kappa(z)$ 形如式 (2). $\kappa(w)$ 是 $f^{-1}(w)$ 的复特征. 另设 $g = Qf, k_g = k_f, \kappa_1(w)$ 是 $g^{-1}(w)$ 的复特征, 引入记号 α, μ, ρ , 即

$$\alpha(z) = \kappa[f(z)], \quad (16a)$$

$$\mu(z) = \kappa_1[f(z)], \quad (16b)$$

$$\rho(z) = |\alpha(z) - \mu(z)|^2. \quad (16c)$$

显而易见, $|\kappa(z)| = |\alpha(z)| = k, |\mu(z)| = k$. 我们旨在证明 $g = f$, 或等价地 $g^{-1} = f^{-1}$. 为此, 我们只需证明 $\alpha(z) = \mu(z), a.e., z \in \Omega$, 或等价地

$$\rho(z) = 0, \quad a.e., \quad z \in \Omega. \quad (17)$$

定理 1 的证明还需要下面的引理.

引理 4^[6] 对定理 1 中的每个 $\mathcal{Q} \in \beta(\Omega)$ 成立, 则

$$\iint_{\Omega} |\mathcal{Q}| dx dy \leq C^{1/2} \iint_{\Omega} |\mathcal{Q}|^{1/2} [k|\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa\mathcal{Q})]^{1/2} dx dy, \quad (18)$$

特别地

$$\iint_{\Omega} |\rho| |\mathcal{Q}| \, dx \, dy = C \delta\{\kappa, \mathcal{Q}\}, \quad (19)$$

其中

$$C = \frac{8k(1+k)^2}{(1+k)^2(1-k)^6}. \quad (20)$$

由于 $m(\Omega) < \infty$, 由引理 2 可选取 Ω 的一子集列 $\{\Omega_n\}$, 使得 $\{\mathcal{Q}_n\}$ 有每个 Ω_n 上都一致收敛于 \mathcal{Q} , 且 $m(\Omega \setminus \Omega_n) < 1/m$. 对给定的 m, n, A , 把 Ω 分解成

$$\Omega = \Omega \setminus \Omega_n \cup \Omega_n \cup \Omega'', \quad (21)$$

其中

$$\Omega \setminus \Omega_n = \Omega(n, A) = \{z \in \Omega \mid |\mathcal{Q}(z)| > A |\mathcal{Q}(z)|\}, \quad (22a)$$

$$\Omega_n = \{z \in \Omega \setminus \Omega_n \mid |\mathcal{Q}(z)| \leq A |\mathcal{Q}(z)|\}, \quad (22b)$$

$$\Omega'' = \{z \in \Omega_n \mid |\mathcal{Q}(z)| \leq A |\mathcal{Q}(z)|\}. \quad (22c)$$

对应此分解, 记

$$I_n = \iint_{\Omega} |\rho|^{1/2} |\mathcal{Q}|^{1/2} [k |\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa \mathcal{Q})]^{1/2} \, dx \, dy = J_1 + J_2 + J_3. \quad (23)$$

由 Schwarz 不等式, 并注意到式(19), 有

$$J_1^2 \leq \iint_{\Omega} |\rho| |\mathcal{Q}| \, dx \, dy \iint_{\Omega} [k |\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa \mathcal{Q})] \, dx \, dy$$

$$\iint_{\Omega} |\rho| |\mathcal{Q}| \, dx \, dy \iint_{\Omega} [k |\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa \mathcal{Q})] \, dx \, dy$$

$$C \delta\{\kappa, \mathcal{Q}\} \iint_{\Omega} [k |\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa \mathcal{Q})] \, dx \, dy.$$

式(7)给出

$$J_1^2 \leq CM \iint_{\Omega} [k |\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa \mathcal{Q})] \, dx \, dy. \quad (24)$$

对于 J_2 , 有

$$J_2^2 \leq \iint_{\Omega} |\rho| |\mathcal{Q}| \, dx \, dy \iint_{\Omega} [k |\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa \mathcal{Q})] \, dx \, dy$$

$$\delta\{\kappa, \mathcal{Q}\} \iint_{\Omega} |\rho| |\mathcal{Q}| \, dx \, dy = A \delta\{\kappa, \mathcal{Q}\} \iint_{\Omega} |\rho| |\mathcal{Q}| \, dx \, dy.$$

式(7)表明

$$J_2^2 \leq AM \iint_{\Omega \setminus \Omega_n} |\rho| |\mathcal{Q}| \, dx \, dy. \quad (25)$$

对于 J_3 , 类似地有

$$J_3^2 \leq CM \iint_{\Omega_n} [k |\mathcal{Q}| - \operatorname{Re}(\kappa \mathcal{Q})] \, dx \, dy. \quad (26)$$

$< \epsilon/3$. 据式(19)和 Fatou 引理, 有 $\iint_{\Omega} |\rho| |Q| dx dy = CM < \frac{\epsilon}{3}$. 由积分的绝对连续性及 $m(\Omega_n) < 1/m$, 式(25)表明, 对于上面已经固定的 $A_0 > 0$, 可选取 m , 使得 $J_2 < \epsilon/3$, 对一切 $n \geq N_1$ 成立.

对上述已固定的 m , 由式(2)和(4)及 $\{\Omega_n\}$ 的选取, 可知 $\{k|Q| - \operatorname{Re}(\kappa Q)\}$ 在 Ω_n 中一致收敛于 0, 且由于 $m(\Omega_n) = m(\Omega) < \frac{\epsilon}{3}$. 故有 $\lim_n \iint_{\Omega_n} [k|Q| - \operatorname{Re}(\kappa Q)] dx dy = 0$. 因此, 可选取 $N_2 \geq N_1$, 使得当 $n \geq N_2$ 时, $J_3 < \epsilon/3$. 由式(23), 我们证明了

$$\lim_n I_n = 0$$

从而根据式(18), 我们证明了

$$\lim_n \iint_{\Omega} |\rho| |Q| dx dy = 0.$$

应用 Fatou 引理, 有

$$\iint_{\Omega} |\rho| |Q| dx dy = 0.$$

因为 $Q \neq 0, a.e., z \in \Omega$ 故式(17)成立. 定理 1 证毕.

3 定理 1 的注记

定理 B 表明, 式(4), (5)隐含着 $\kappa = kQ/|Q|$. 本节定理 2 将证明, 满足式(4), (7a) 和式(10)的映照 f 可以是一个极值映照. 但 f 可以不是 Teichmüller 映照, 且这样的 f 有无穷多个. 事实上, 我们有如下的

定理 2 设 f 为 Ω 上的拟共形映照, $k = \|\kappa\|$. κ 满足式(4), (7a) 和式(10). 在这里, $\lim_n Q_n = Q$. 则必存在无穷多个极值非 Teichmüller 映照, 其复特征满足式(4), (7a) 和式(10).

证明 由式(4)及 EröpoB 定理可知, 必存在 $\Omega' \subset \Omega, 0 < m(\Omega') < \frac{\epsilon}{3}, \{Q_n\}$ 在 Ω' 上一致收敛于 Q , 对任意的 $t \in [0, 1]$, 置

$$\tilde{\kappa}(z, t) = \begin{cases} \kappa(z), & z \in \Omega \setminus \Omega', \\ t\kappa(z), & z \in \Omega'. \end{cases}$$

则 $\tilde{\kappa}(z, t)$ 为极值映照的复特征, 且满足式(4), (7a) 和式(10). 事实上, $\tilde{\kappa}(z, t)$ 满足式(4)是已知的假设. 由 κ 满足式(7a)及 $\|\kappa\| = k$ 可得

$$\delta\{\tilde{\kappa}, Q_n\} = \delta\{\kappa, Q_n\} + (1-t) \iint_{\Omega'} \operatorname{Re}(\kappa Q) dx dy$$

$$M(\kappa) + k(1-t) \iint_{\Omega'} |Q| dx dy.$$

由 Q_n 在 Ω' 上一致收敛可知, 必存在 N . 当 $n \geq N$ 时, $|Q_n(z) - Q(z)| < 1, z \in \Omega'$, 故有

$$\iint_{\Omega'} |Q_n| dx dy \leq \iint_{\Omega'} |Q_n(z) - Q(z)| dx dy + \iint_{\Omega'} |Q(z)| dx dy < m(\Omega') + \iint_{\Omega'} |Q| dx dy.$$

记 $M := m(\Omega) + \varphi$, 便有

$$\delta\{\tilde{\kappa}, \varphi\} = M(\kappa) + k(1-t)M_1 < M(\kappa) + M_1 = M(\tilde{\kappa}(z, t)).$$

可见, $\tilde{\kappa}(z, t)$ 满足式(7a).

注意到 $\{\varphi\}$ 在 Ω 上一致收敛于 φ , 故对于充分大的 A 和 n , 有 $|\varphi(z)| \leq A|\varphi(z)|$, 这里 $z \in \Omega$. 因此, 对于充分大的 A 和 n , 当 $z \in \Omega(n, A)$ 时, $\tilde{\kappa}(z, t) = \kappa(z)$. 所以

$$\iint_{\Omega(n, A)} [k|\varphi| - \operatorname{Re}(\tilde{\kappa}\varphi)] dx dy = \iint_{\Omega(n, A)} [k|\varphi| - \operatorname{Re}(\kappa\varphi)] dx dy.$$

由 κ 满足式(10), 可立即得到 $\tilde{\kappa}(z, t)$ 也满足了式(10).

现在来证明, $\tilde{\kappa}(z, t)$ 是极值拟共形映照的复特征. 事实上, 由于 $\delta\{\tilde{\kappa}, \varphi\} < M(\tilde{\kappa}(z, t))$, $\varphi \in L_{loc}^1(\Omega)$. 因此, $\lim_n \delta\{\tilde{\kappa}, \varphi\} / \|\varphi\| = 0$, 从而 $\lim_n \{[\operatorname{Re} \iint_{\Omega} \tilde{\kappa} \varphi dx dy] / \|\varphi\|\} = k$. 由一个映照是极值映照的充要条件可知, $\tilde{\kappa}(z, t)$ 是极值拟共形映照的复特征. 定理获证.

注 证明 $\tilde{\kappa}(z, t)$ 满足式(4), (7a) 和式(10), 并不需要 $\varphi \in L_{loc}^1(\Omega)$.

参 考 文 献

- 1 Reich E. A criterion for unique extremality of Teichmüller mappings[J]. India Univ. Math. J., 1981, 30: 411~447
- 2 刘金雄. Reich 的一个定理的改进及其相关问题[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2000, 21(1): 8~10
- 3 Reich E. On criteria for unique extremality of Teichmüller mappings[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. (Ser. A. I. Math.), 1981, 6: 289~301
- 4 刘增荣. Reich 的一个定理的改进[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(1): 1~5
- 5 Ahlfors L V. Lecture on quasiconformal mappings[J]. Van Norstrand Mathematical Studies, 1966, (10): 8~9

Criterion for a Class of Uniquely Extremal Teichmüller Mappings

Liu Jinxiong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The criterion is given to a class of uniquely extremal Teichmüller mappings, the assumption of $\varphi \in L_{loc}^1(\Omega)$ in the related results.

Keywords quasiconformal mapping, extremal mapping, uniquely extremal mapping, Teichmüller mapping, complex dilatation