

文章编号 1000-5013(2000) 03-0275-07

# 开洞核芯筒结构的自由振动

王 全 凤

( 华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

**摘要** 用等效剪力膜代替核芯筒洞口之间的连梁, 把开洞的核芯筒结构模拟成为一个闭口的薄壁杆. 利用有限杆元法, 提出开洞核芯筒结构动力特性分析的数值方法. 它考虑了扭转、翘曲尤其筒壁中面上的剪应变对动力特性的影响.

**关键词** 核芯墙, 自由振动, 薄壁杆, 扭转, 翘曲

**中图分类号** TU 33+8.01

**文献标识码** A

## 1 问题的提出

沿着结构竖向分布的剪力墙与楼层共同工作, 可能会形成一个中空的三维结构. 电梯井就是一个典型的核芯筒. 这种结构能有效地抵抗由于侧向力未能通过结构的质心所发生的扭转. 由于扭转, 核芯筒表现明显的平面外翘曲, 可以抽象成为一个典型的薄壁杆. 核心筒的扭转特征, 明显是介于开口截面悬臂梁和闭口截面的悬臂梁之间. 前者呈现弯扭特征, 后者呈现剪扭特征, 这主要取决于洞口之间连梁的刚度. 如果连梁刚度很软, 可用开口截面的悬臂梁来代替; 反之, 可用闭口截面的悬臂梁来代替. 这是两种极端的情况, 因而都不能用来描述核心筒的扭转特征. 在那里, 弯曲和剪切都是同等重要的分量, 必须同时考虑. 在过去的 20 几年中, 一些涉及到核心筒扭转反应的方法已经被提出<sup>[1~7]</sup>, 但很少被用来解决它的动力问题<sup>[8]</sup>. 有限单元法可以被用来分析核心筒的振动问题, 但即使采用很细的网络划分, 其精确度也不一定比连续法高<sup>[9]</sup>. 本文洞口之间的连梁用一层高的等效连续体代替, 核芯筒结构被模拟成为一个闭口的薄壁杆. 用能够同时考虑杆件扭转、翘曲和筒壁中面上的剪应变影响的有限杆元法来解决<sup>[9]</sup>. 在此方法中, 该替代结构仅仅沿着一个方向被离散, 把二维动力分析问题简化成为一个一维问题. 和传统的有限单元法比较, 大大减少了未知量的数目. 本文仅仅采用 Vlasov 的刚性截面假设<sup>[10]</sup>.

## 2 分析模型

考虑一个固定在地面上的核芯筒结构, 如图 1 所示. 图中  $a$  和  $b$  分别是核芯筒截面的长度和宽度,  $d$  和  $l$  分别是连梁的高度和长度,  $H$  和  $h$  分别是核芯筒的总高和层高,  $t$  是核芯筒的厚度. 根据文献 [1], 加缀板的开口截面能用一个等效的剪切膜代替缀板, 抽象成为一个闭口

截面. 但有两个影响因素没有被考虑, 其一是边墙的扭转变形, 另一个是沿着截面的剪力流. 本文等效的剪力膜厚度的确定, 既考虑了缀板的弯曲和剪切的剪切变形, 又考虑了边墙的平面外

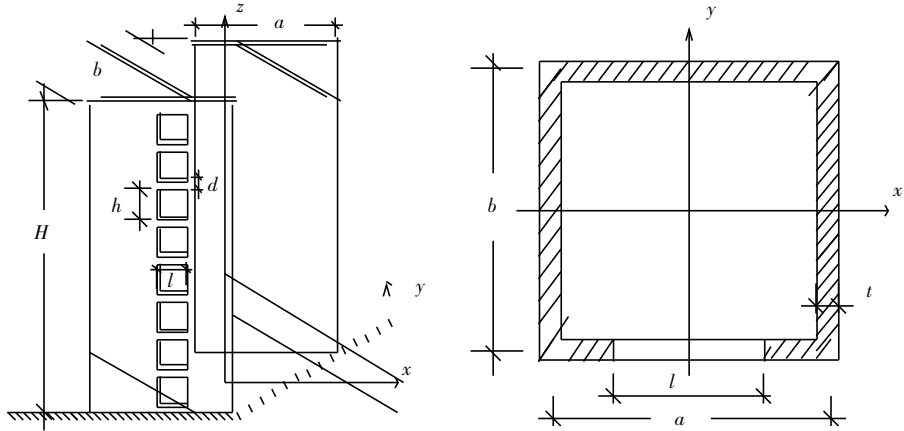


图1 核芯筒结构和它的平面

弯曲和沿着等效闭口截面的连续剪力流. 如果核芯筒墙壁的厚度是常数, 则等效剪切膜厚度<sup>[1]</sup>为

$$\bar{t} = (-C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4C_2C_3}) / 2C_2, \quad (1)$$

式中  $C_1 = hGl / 2a^2$ ,  $C_2 = [C_1(2a - l + 2b)] / l$ ,  $C_3 = (BW^2 + WB^2a^2) / (Ba^2 + W)$ ,  $B = Etd^3 / 2[a^3 + 3(l + v)ad^2]$ ,  $W = D[2(1 - v)\frac{d}{b} + \frac{2\pi^2 h^2 b}{3(h - d)^3} + (1 - v) \cdot \frac{(2d^2 + h^2)}{(h - d)b}] + \frac{Etl^3 2\pi^2 h^2}{12(h - d)^3}$ .  $D$  是板的弯曲刚度,  $E$  和  $G$  分别是弹性模量和剪切模量,  $v$  是 Poisson 比. 决定了核芯筒开洞边的等效厚度, 核芯筒截面被抽象为等效的闭口截面, 如图 2 所示.

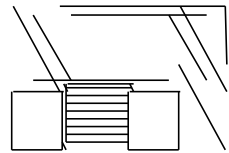


图2 等效截面

### 3 等效薄壁杆的能量方程

Hamilton 原理的变分形式表达为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (2)$$

式中  $U$  是振动引发的应变能,  $T$  是相应的动能. 积分时间间隔  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2\pi / \omega$ ,  $\omega$  为振动的固有圆频率. 对于一个连续体, 应变能  $U$  为

$$U = \frac{1}{2} \int_V (E\epsilon^2 + G\gamma^2) dV, \quad (3)$$

式中  $\epsilon$  和  $\gamma$  分别是正应变和剪应变. 因为截面中心线切方向应力  $\sigma_s$  和正方向应力  $\sigma_n$  比纵向应力  $\sigma_z$  小得多, 两者皆被忽略. 对当前动力特性分析, 线性解是足够的. 考虑的杆单元是沿着纵向  $z$  (一维), 除了下列应变分量外, 其它应变分量皆为零.

$$\epsilon = \partial v / \partial z, \quad (4)$$

$$\gamma = 2\theta \frac{d\theta}{dz} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5)$$

式(4), (5)中  $w(z)$  是沿着  $z$  方向的纵向翘曲位移, 其位移分布由式(9)决定;  $s$  是沿着截面中心线的曲线坐标,  $v_t$  是在截面中心线点  $s$  的切向位移,  $\theta$  是截面的扭转角,  $\rho_n$  是从截面中心线起的法向距离. 把式(4), (5)代入式(3), 忽略高阶项, 得到长度  $H$  杆单元应变能的表达式<sup>[9]</sup>为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ \int_{\Sigma} [E \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + G \left( \frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right)^2] t_0 ds + G J_d \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right\} dz, \quad (6)$$

式中  $J_d$  是 Venant 扭转常数,  $\Sigma$  是整个截面的长度,  $t_0$  是等效壁厚. 长度  $H$  杆单元的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^H \int_{\Sigma} \rho_0 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} \right)^2 \right] t_0 ds dz, \quad (7)$$

式中  $v_x$  和  $v_y$  分别是截面上任意一点  $x$  方向和  $y$  方向的位移,  $\rho_0$  是杆件材料密度. 根据 Vlasov 刚性截面的假设<sup>[10]</sup>, 用质心位移表达切向位移为

$$v_t = \eta_{t1 \times 3} v_{c3 \times 1}, \quad (8)$$

式中  $\eta = [\cos\alpha \sin\alpha \rho]^T$ ;  $v_c = [v_{cx} \ v_{cy} \ \theta]^T$ ,  $\alpha$  是  $x$  轴和点  $s$  切线的夹角,  $\rho(s)$  是从质心  $c$  到点  $s$  切线的距离,  $v_{cx}$  和  $v_{cy}$  分别是质心位移  $v_c$  的  $x$  和  $y$  方向的位移分量. 整个截面的翘曲位移为

$$w(s, z) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(s) w_i(z) = \Psi_{1 \times n} \mathbf{w}_{n \times 1}, \quad (9)$$

式中  $n$  是划分整个截面为子区间的结点数.  $\Psi(s)$  是决定  $w_i(z)$  时所选择的插值函数, 即

$$\Psi_{1 \times n} = [\Psi_1(s), \Psi_2(s), \dots, \Psi_n(s)],$$

$$\mathbf{w}_{n \times 1} = [w_1(z), w_2(z), \dots, w_n(z)]^T.$$

## 4 薄壁杆动力方程

关于薄壁杆的自由振动,  $v_t(z)$  和  $w(s, z)$  为时间  $t$  的简谐函数. 式(8), (9)可分别表示为

$$v_t(z, t) = V_t(z) \sin(\omega t + \epsilon) = \eta_{t1 \times 3} \bar{v}_{c3 \times 1} \sin(\omega t + \epsilon), \quad (10)$$

$$w(s, z, t) = W(s, z) \sin(\omega t + \epsilon) = \Psi_{1 \times n} \bar{w}_{n \times 1} \sin(\omega t + \epsilon), \quad (11)$$

式中  $V_t(z)$  和  $W(s, z)$  是振型函数,  $\epsilon$  是初相角. 因为  $z$  轴和  $y$  轴是通过截面质心  $c$  的主轴, 在振动时, 则下面的关系式成立. 即

$$v_x(y, z, t) = (v_{cx} - y\theta) \sin(\omega t + \epsilon),$$

$$v_y(x, z, t) = (v_{cy} + x\theta) \sin(\omega t + \epsilon).$$

把式(10), (11)和上式代入式(6), (7), 可得

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H (E \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{w} + G \mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{w} + 2G \mathbf{w}^T \mathbf{C} v_c + G v_c^T \mathbf{D} v_c + G \theta^T J_d \theta) dz,$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^H \rho_0 \omega^2 (\mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{w} + v_c^T \mathbf{D} v_c) dz,$$

式中

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \int_{\Sigma} \Psi^T \Psi ds, \quad \mathbf{B}_{n \times n} = \int_{\Sigma} \Psi^T \Psi t ds,$$

$$\mathbf{C}_{n \times 3} = \int_{\Sigma} \Psi^T \eta ds, \quad \mathbf{D}_{3 \times 3} = \int_{\Sigma} \eta^T \eta t ds.$$

$$\mathbf{D}_{3 \times 3} = \int_{\Sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ -y & x & x^2 + y^2 \end{bmatrix} t ds = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y \end{bmatrix}.$$

上式中,  $\bar{A}$  为薄壁杆截面面积,  $\mathbf{I}_x$  和  $\mathbf{I}_y$  分别为截面对惯性主轴  $x$  和  $y$  的惯性矩. 根据 Hamilton 原理, 分别对式(2)中的变量  $\mathbf{w}$  和  $\mathbf{v}_c$  进行一阶变分, 并利用如分部积分等一些常用的技巧, 得到薄壁杆动力方程为

$$E\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{w} - G\mathbf{B}_{n \times n} \mathbf{w} - G\mathbf{C}_{3 \times 1} \mathbf{v}_{c3 \times 1} + \rho_0 \omega^2 \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad (14)$$

$$G\mathbf{C}_{3 \times n}^T \mathbf{w}_{n \times 1} + G\mathbf{D}_{3 \times 3} \mathbf{v}_{c3 \times 1} + \rho_0 \omega^2 \mathbf{D}_{3 \times 3} \mathbf{v}_{c3 \times 1} = \mathbf{0}_{3 \times 1}. \quad (15)$$

其边界条件为

$$E\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{w}_{n \times 1} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_{3 \times n}^T \mathbf{w}_{n \times 1} + \mathbf{D}_{3 \times 3} \mathbf{v}_{c3 \times 1} = \mathbf{0}_{3 \times 1}. \quad (17)$$

式中  $\mathbf{D}_{3 \times 3} = \mathbf{D}_{i3 \times 3} + J_d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

## 5 动力方程的解

根据刚性截面假设<sup>[10]</sup>, 杆元两端的位移可用矩阵表示为

$$\mathbf{W}_{E(2n+6) \times 1} = [v_{1x}, v_{1y}, \theta_1, w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}, v_{2x}, v_{2y}, \theta_2, w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}]^T, \quad (18)$$

式中右端变量的第1个脚标1和2分别表示杆元的始端和终端,  $v_{1x}$  表示在始端沿着  $x$  方向的位移,  $w_{1n}$  表示在始端第  $n$  个结点上的纵向位移. 类似于有限元分析, 为了薄壁杆动力分析, 一个有限杆元被导出. 定义一个变换为

$$\mathbf{w}_{n \times 1} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{U}_{n \times 1}, \quad (19)$$

式中  $\mathbf{a} = [a^1, a^2, \dots, a^n]$ ;  $\mathbf{U} = [U^1, U^2, \dots, U^n]^T$ ,  $\mathbf{a}^i$  是一个特性向量. 根据文献[9]的研究, 杆单元的位移向量可用杆单元的端位移表示, 即

$$\begin{bmatrix} v_c \\ w \end{bmatrix}_{(n+3) \times 1} = \mathbf{N}_{(n+3) \times (2n+6)} \mathbf{W}_{E(2n+6) \times 1}, \quad (20)$$

式中形函数矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{(n+3) \times (2n+6)} &= \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_v(z)]_{3 \times (2n+6)} \\ \mathbf{a}_{n \times n} [\mathbf{T}_w(z)]_{n \times (2n+6)} \end{bmatrix} \right\} [\mathbf{T}_E]_{(2n+6) \times (2n+6)}^{-1}, \\ [\mathbf{T}_v]_{3 \times (2n+6)} &= -\mathbf{D}_{3 \times 3}^{-1} \mathbf{C}_{3 \times n}^T \mathbf{a}_{n \times n} \int_0^z [\mathbf{R}_0]_{n \times n} dz + \mathbf{a}_{n \times n}^T \mathbf{C}_{n \times 3} + \\ &\quad z \frac{G}{E} \mathbf{I}_{3 \times 3}, \mathbf{I}_{3 \times 3}, -\mathbf{D}_{3 \times 3}^{-1} \mathbf{C}_{3 \times n}^T \mathbf{a}_{n \times n} \int_0^z \mathbf{R}_{n \times 2n} dz \}, \\ [\mathbf{T}_w]_{n \times (2n+6)} &= \{ [\mathbf{R}_0]_{n \times n} \mathbf{a}_{n \times n}^T \mathbf{C}_{n \times 3}, \mathbf{0}_{n \times 3}, \mathbf{R}_{n \times 2n} \}, \\ [\mathbf{T}_E]_{(2n+6) \times (2n+6)} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_v(0)]_{3 \times (2n+6)} \\ \mathbf{a}_{n \times n} [\mathbf{T}_w(0)]_{n \times (2n+6)} \\ [\mathbf{T}_v(H)]_{3 \times (2n+6)} \\ \mathbf{a}_{n \times n} [\mathbf{T}_w(H)]_{n \times (2n+6)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{0n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{2} & & & & \\ & \frac{z^2}{2} & & & \\ & & \frac{z^2}{2} & & \\ & & & -\frac{1}{\Lambda^4} \frac{E}{G} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -\frac{1}{\Lambda} \frac{E}{G} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{R}_{n \times 2n} = \begin{bmatrix} z, 1 & & & & & & & \\ & z, 1 & & & & & & \\ & & z, 1 & & & & & \\ & & & e^{\lambda_4 \xi}, & e^{\lambda_4 \eta} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & e^{\lambda_4 \xi}, & e^{\lambda_4 \eta} \end{bmatrix},$$
$$\eta = \frac{z}{H_i}, \quad \xi = 1 - \eta, \quad \lambda_i = H_i \sqrt{\frac{G}{E} \Lambda_i},$$

$\mathbf{I}$  是单位矩阵,  $\lambda$  是特征值. 把式(20)代进式(14)和式(15), 得有限单元刚度动力方程的标准形式为

$$(\mathbf{K} + \omega^2 \mathbf{M})_{(2n+6) \times (2n+6)} \mathbf{W}_{E(2n+6) \times 1} = \mathbf{0}_{(2n+6) \times 1}, \tag{21}$$

式中  $\mathbf{K}$  是线性应变刚度矩阵, 依推导有限单元法刚度矩阵步骤可得;  $\mathbf{M}$  是非线性广义质量矩阵, 可从荷载动能推导而得. 即

$$\mathbf{M}_{(2n+6) \times (2n+6)} = (\mathbf{T}_E^{-1})_{(2n+6) \times (2n+6)}^T \left\{ \int_0^H \rho ([\mathbf{T}_v]_{(2n+6) \times 3}^T \mathbf{D}_{3 \times 3} [\mathbf{T}_v])_{3 \times (2n+6)} + \right. \\ \left. [\mathbf{T}_w]_{(2n+6) \times n}^T \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n \mathbf{T}_w \right\}_{n \times (2n+6)} \mathrm{d}x \} \mathbf{T}_{E(2n+6) \times (2n+6)}^{-1}.$$

## 6 核芯筒动力特性的例子

为了阐述本方法的应用, 列举两个核芯墙(筒)扭转动力特性的例子.

**例 1** 如图 3 所示的 10 层结构, 为了方便和文献 [6] 比较, 使用相同的数据 ( $E=2.413 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{mm}^2$ ,  $G=E/2.3$ ). 表 1 展示该结构振动的扭转自振周期, 考虑了结构扭转、翘曲

和筒壁中面上剪应变的影响. 假设楼层扭转惯性矩值, 能够得到 1 s 的该结构扭转自振周期. 表 1 中的例 1 还给出了与有限单元法结果的比较<sup>[8]</sup>, 括号内数值为本方法与有限单元法相比的百分比. 从表中可以看到, 在前 8 个振型, 这两种数值结果吻合得很好.

例 2 与例 1 不同, 在核芯墙结构每层有 4 个连梁和剪力墙相连, 如图 4 所示. 假设该连梁的翘曲, 没有进一步改变该结构的扭转特性, 采用与第 1 个例子相同的楼层扭转惯性矩值.

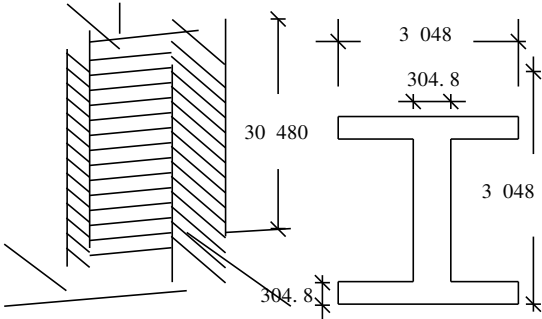


图3 核芯墙结构及其平面(mm)

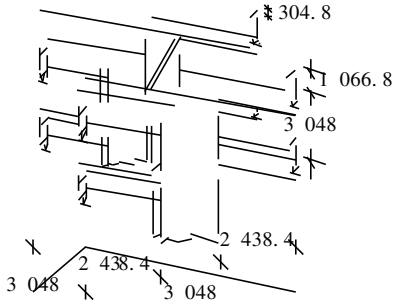


图4 有连梁的核芯墙结构(mm)

从本例结果与其它数值结果的比较可以看出, 对于高振型情况, 其差值大些, 且差值随着

表 1 对应例子的前 10 个振型的自振周期(s)

例 1			例 2		
振型	有限单元法	本文的方法	振型	有限单元法	本文的方法
1	1.000 0	1.001 0(100.0%)	1	1.504 1	0.558 4
2	0.271 3	0.260 2(95.9%)	2	0.159 4	0.149 4
3	0.120 8	0.115 7(95.8%)	3	0.087 9	0.070 9
4	0.069 0	0.066 9(97.0%)	4	0.057 4	0.044 1
5	0.046 1	0.045 0(97.6%)	5	0.041 5	0.031 4
6	0.034 3	0.033 6(97.1%)	6	0.032 3	0.031 4
7	0.027 6	0.026 2(96.0%)	7	0.026 7	0.019 6
8	0.023 6	0.021 5(91.1%)	8	0.023 2	0.016 4
9	0.021 2	0.018 1(85.4%)	9	0.021 0	0.014 1
10	0.019 9	0.015 7(78.9%)	10	0.019 9	0.012 3

振型愈高而愈大, 普遍比文献 [8] 结果小. 究其原因, 本文把核芯筒结构比拟为等效的薄壁杆结构, 后者明显有较大的剪切扭转刚度.

7 结论

本文把核芯筒结构模拟成为一个等效的闭口薄壁杆件, 利用有限杆元法, 考虑杆件的扭转、翘曲和筒壁中面上的剪应变的影响, 提出一种核芯筒结构动力特性分析的数值分析方法. 采用两个数值例子校核本方法的有效性和可行性, 与有限单元法比较, 可大大减少计算机 CUP 时间和数据准备时间.

参 考 文 献

1 Liauw T C. Torsion of multi-story spacial core walls[J]. Proc. Instn. Civ. Engrs., 1978, 75(2): 601~609  
2 Roberts T M, Achour B. Torsion and bending of braced thin-walled open sections[J]. J. Struct. Engrg., 1994, 20(10): 1300~1312

- ASCE, 1989, 116(1): 1 ~ 12
- 3 Rosman R. Torsional of perforated concrete shafts[J]. J. Struct. Div. ASCE, 1969, 95(5): 991 ~ 1 010
- 4 Rutenberg A V, Eisenberger M. Torsion of tube structures. planar formulation[J]. J. Comp. & Struct. , 1983, 17: 257 ~ 260
- 5 Rutenberg A V, Tso W K. Torsional analysis of perforated core structure[J]. J. Struct. Div. ASCE, 1975, 101(3): 539 ~ 549
- 6 Stafford-Smith B, Taranath B S. The analysis of tall core-supported structure subjected to torsion[J]. Instn. Civ. Engrs. , 1972, 53: 173 ~ 187
- 7 Sumer O, Askar G. Analysis of a mono-symmetric core wall structure coupled with connecting beams [J]. J. Thin-Walled Struct., 1992, 14: 193 ~ 208
- 8 Vasquez J, Riddell R. Thin-walled core element for multistorey buildings[J]. J. Struct. Engrg. ASCE, 1980, 110(5): 1 021 ~ 1 034
- 9 Wang Quanfeng, Li W Y. Spatial stability of thin-walled eccentric compressive members[J]. J. Engrg. Mechanics. ASCE, 1999, 125(2): 197 ~ 205
- 10 Vlasov V Z. Thin-walled elastic beams[M]. 2nd Ed. New York: Israel Program for Scientific Translations Jerusalem Israel, 1961. 78 ~ 98
- 11 Khan M A, Stafford-Smith B. Restraining action of bracing in thin-walled open section beams[J]. Proc. Instn. Civ. Engrs., 1975, 59(2): 67 ~ 78

## Free Vibration of a Structure with Perforated Core Walls

Wang Quanfeng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** A structure with perforated core walls is simulated as thin-wall member with closed cross section, while the connecting beams between the openings of core walls are replaced by equivalent shear diaphragm with a certain thickness. A numerical method is then proposed by applying the method of finite member element for analysing dynamic characteristic of the structure with perforated core walls. The effects of torsion, warping, and shear strain on the middle surface of walls in particular on the analysis of dynamic characteristic are considered in this method. As compared with other numerical methods, the author's method is demonstrated to be effective and feasible.

**Keywords** core wall, free vibration, thin walled member, torsion, warping