第 21 卷　第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 21　No. 3
2000 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2000

文章编号　1000-5013(2000)03-0221-07

Burger´s 方程的若干 AGE 方法

曾　文　平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　以求解 Burger´s 方程的中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式及修正 Dennis 格式为基础, 构造了若干新的 AGE 方法(即分别称为 C-AGE, U-AGE、S-AGE 和 M-AGE 方法), 讨论了方法的线性化稳定性. 数值结果表明, 对于求解 Burger´s 方程大 Reynold 数问题, 除了 C-AGE 方法外, 文中所构造的其他 AGE 方法明显优于 Evans 的分组显式方法.

关键词　Burger´s 方程, 交替分组显式格式, 稳定性
中图分类号　O 241.82　　文献标识码　A

本文考虑非线性 Burger´s 方程的混合问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \epsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 \le x \le 1, t > 0), \quad (1)\\
u(x,0) = f(x) & (0 \le x \le 1), \quad (2)\\
u(0,t) = g_1(t), u(1,t) = g_2(t) & (t > 0). \quad (3)
\end{cases}
$$

该问题可作为 Nanier-stokes 方程的简化形式. 因此, 它的求解方法的研究具有实用意义. 文[1~5]采用分组显式(GE)和交替分组显式(AGE)的方法, 求解问题(1)~(3). 对于 ϵ 为 1, 0.1 这样不太小的数, 文[2]的结果是好的. 但当 ϵ 取小时(如 $\epsilon = 0.01$ 等), 计算结果失真较大. 本文将以求解 Burger´s 方程的中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式及修正 Dennis 格式[6]为基础, 构造一组扩散项具 Saulyev 型而非线性项处理均不同于文[1~5]的差分格式, 进而构造若干新的交替方向分组(AGE)方法(分别记为 C-AGE, U-AGE, S-AGE 及 M-AGE 方法)及相应的交替方向显式(ADE)方法. 讨论了方法的线性化稳定性. 最后, 数值结果表明: 对于求解 Burger´s 方程的大 Reyonlds 数问题, 除了 C-AGE 方法外, 本文所构造的其他 AGE 方法均明显地优于 Evans[1~3]的分组显式格式.

1　交替方向显式(AGE)方法

对区间[0, 1]取均匀网格点 $x_j = jh, j = 0, 1, \cdots, m, mh = 1; t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \cdots$.

Burger´s 方程(1)有 4 种常见格式: 中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式和修正

收稿日期　1999-12-23　　作者简介　曾文平(1940-), 男, 教授
基金项目　福建省自然科学基金资助项目

Dennis 格式.

它们可以统一写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - P_j^n(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + Q_j^n(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \tag{4}$$

其中

$$P_j^n = \frac{u_j^n \tau}{2h} = r \cdot \frac{u_j^n h}{2}, \qquad r = \tau / h^2, \tag{5}$$

$$Q_j^n = \begin{cases} \sigma\ (\text{中心差分格式}), \\ \sigma\left(1 + \frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right) \qquad (\text{显式逆风格式}), \\ \sigma\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left|R_j^n\right|} + \frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right) \qquad (\text{Samarskii 格式}), \\ \sigma\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left|R_j^n\right| + \frac{1}{6}(R_j^n)^2} + \frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right) \qquad (\text{修正 Dennis 格式}). \end{cases} \tag{6}$$

由此给出相应的半隐式格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - P_j^n(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^n) + Q_j^n(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^n + u_{j-1}^n), \tag{7}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - P_j^n(u_{j+1}^n - u_{j-1}^{n+1}) + Q_j^n(u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}). \tag{8}$$

从上述公式, 可以给出 3 种半显式算法. (1) RL 公式(从右往左计算)为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{1 + Q_j^n}\{(Q_j^n - P_j^n)u_{j+1}^{n+1} + (1 - Q_j^n)u_j^n + (P_j^n + Q_j^n)u_{j-1}^n\}. \tag{9}$$

(2) LR 公式(从左往右计算)为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{1 + Q_j^n}\{Q_j^n + P_j^n)u_{j-1}^{n+1} + (1 - Q_j^n)u_j^n - (P_j^n - Q_j^n)u_{j+1}^n\}. \tag{10}$$

(3) ADE(交替方向显式)方法为

$$\left.\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{1 + Q_j^n}\{(Q_j^n - P_j^n)u_{j+1}^{n+1} + (1 - Q_j^n)u_j^n + (P_j^n + Q_j^n)u_{j-1}^n\}, \\ u_j^{n+2} &= \frac{1}{1 + Q_j^{n+1}}\{(P_j^{n+1} + Q_j^{n+1})u_{j-1}^{n+2} + (1 - Q_j^{n+1})u_j^{n+1} - \\ &\quad (P_j^{n+1} - Q_j^{n+1})u_{j+1}^{n+1}\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2 AGE(交替分组显式)方法

先形成 GE(分组显式)格式, 将(x_j, t_{n+1})及(x_{j+1}, t_{n+1})分成一组, 在点(x_j, t_{n+1})用格式(11), 在点(x_{j+1}, t_{n+1})用格式(12). 于是, 有 2×2 的方程组, 它们的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 + Q_j^n & P_j^n - Q_j^n \\ -(P_{j+1}^n + Q_{j+1}^n) & 1 + Q_{j+1}^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_j^{n+1} \\ u_{j+1}^{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - Q_j^n & 0 \\ 0 & 1 - Q_{j+1}^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_j^n \\ u_{j+1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (P_j^n + Q_j^n)u_{j-1}^n \\ -(P_{j+1}^n - Q_{j+1}^n)u_{j+2}^n \end{bmatrix}. \tag{12}$$

若记

$$A = 1 + (1 - P_{j+1}^n) Q_j^n + (1 + P_j^n) Q_{j+1}^n + P_j^n P_{j+1}^n. \tag{13}$$

则式(12)可以显式地表示为

$$\begin{bmatrix} u_j^{n+1} \\ u_{j+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 1 + Q_{j+1}^n & -(P_j^n - Q_j^n) \\ P_{j+1}^n + Q_{j+1}^n & 1 + Q_j^n \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 - Q_j^n & 0 \\ 0 & 1 - Q_{j+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^n \\ u_{j+1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (P_j^n + Q_j^n) u_{j-1}^n \\ -(P_{j+1}^n - Q_{j+1}^n) u_{j+2}^n \end{bmatrix} \right\}, \tag{14}$$

其中 A 如式(13)所示.

对不成组的内点,则单独给出.(1)右不成组单点为

$$u_{m-1}^{n+1} = \frac{1}{1 + Q_{m-1}^n} \{ -(P_{m-1}^n - Q_{m-1}^n) u_m^{n+1} + (1 - Q_{m-1}^n) u_{m-1}^n + (Q_{m-1}^n + P_{m-1}^n) u_{m-2}^n \}. \tag{15}$$

(2)左不成组单点为

$$u_1^{n+1} = \frac{1}{1 + Q_1^n} \{ (P_1^n + Q_1^n) u_0^{n+1} + (1 - Q_1^n)\,{}_1^n + (Q_1^n - P_1^n) u_2^n \}, \tag{16}$$

其中 P_j^n, Q_j^n 如式(5),(6)所示.

利用上述计算公式,可以形成 GE 算法. 分两种情况讨论:(1) 类似于文[1～5]可形成 GER, GEL, (S) AGE 及(D) AGE 算法.(2) m 为奇数,从略.

各种算法的局部截断误差可用 Taylor 级数展开而得,其阶为 $O(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h})$. 由此看出,仅当 $\tau, h \to 0$ 且 $\tau/h \to 0$ 时格式是相容的. 在 GER, GEL 算法中,在不同网格点上截断误差中含有 $\frac{\tau}{h}$ 的项的量值相等而符号相反,当交替使用时互相抵消. 特别在(S) AGE, (D) AGE 及 ADE 格式中,在不同时间层上也有类似作用. 因此,在实际计算中精度是高的.

3　线性化稳定性分析

本节仅用 Fourier 方法作启示性分析. 对线性化格式再作冻结系数,内点格式为

$$\begin{bmatrix} 1 + Q & P - Q \\ -(P + Q) & 1 + Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^{n+1} \\ u_{j+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - Q & 0 \\ 0 & 1 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^n \\ u_{j+1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (P + Q) u_{j-1}^n \\ -(P - Q) u_{j+2}^n \end{bmatrix}. \tag{17}$$

在式(17)中,有

$$P = \frac{a\tau}{2h} = r \cdot \frac{ah}{2} \triangleq r \cdot \tilde{p}, \qquad r = \tau/h^2, \qquad \tilde{p} = \frac{ah}{2}. \tag{18}$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon r & (\text{中心格式}) \\ \epsilon r\left(1 + \frac{1}{2}R\right) & (\text{显式逆风格式}) \\ \epsilon r\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}R} + \frac{1}{2}R\right) & (\text{Samarkii 格式}) \\ \epsilon r\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}R + \frac{1}{6}R^2} + \frac{1}{2}R\right) & (\text{修正 Dennis 格式}) \end{array} \right\} \triangleq r\tilde{Q}, R = |a| h/\epsilon, \tag{19}$$

$$\tilde{Q}=\begin{cases}\epsilon & (\text{中心格式}),\\ \epsilon\left(1+\dfrac{1}{2}R\right) & (\text{显式逆风格式}),\\ \epsilon\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}R}+\dfrac{1}{2}R\right) & (\text{Samarskii 格式}),\\ \epsilon\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}R+\dfrac{1}{6}R^2}+\dfrac{1}{2}R\right) & (\text{修正(Dennis 格式)}.\end{cases}\tag{20}$$

同时,有右不成组单点为

$$u_{m-1}^{n+1}=\frac{1}{1+Q}\{-(P-Q)u_m^{n+1}+(1-Q)u_{m-1}^n+(Q+P)u_{m-2}^n\},\tag{21}$$

而左不成组单点为

$$u_1^{n+1}=\frac{1}{1+Q}\{(P+Q)u_0^{n+1}+(1-Q)u_1^n+(Q-P)u_2^n\},\tag{22}$$

下面仅对GER 格式及(S) AGE 格式详加讨论,其余类似可得.

(1) GER 方法即左边 $m-2$ 个内点用(14)式,最后一个内点用(15)式. 其矩阵形式为

$$(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{G}_1)\boldsymbol{u}^{n+1}=(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{G}_2)\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{b}_1^n,\tag{23}$$

式中 $\boldsymbol{u}^n=[u_1^n,u_2^n,\cdots,u_{m-1}^n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}_1^n=(r(\tilde{P}+\tilde{Q})u_0^n,0,\cdots,0,-r(\tilde{P}-\tilde{Q})u_m^{n+1}]^{\mathrm{T}}$. 其中

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}^{(1)} &&&&\\ & \boldsymbol{G}^{(2)} &&&\\ && \ddots &&\\ &&& \boldsymbol{G}^{(\frac{m-2}{2})} &\\ &&&& \tilde{Q}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_2=\begin{bmatrix}\tilde{Q} &&&&\\ & \boldsymbol{G}^{(1)} &&&\\ && \boldsymbol{G}^{(2)} &&\\ &&& \ddots &\\ &&&& \boldsymbol{G}^{(\frac{m-2}{2})}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{G}^{(i)}=\begin{bmatrix}\tilde{Q} & \tilde{P}-\tilde{Q}\\ -\tilde{Q}(\tilde{P}+\tilde{Q}) & \tilde{Q}\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\tilde{Q} & -\alpha_1\\ -\alpha_2 & \tilde{Q}\end{bmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,\dfrac{m-2}{2})$, $\alpha_1=\tilde{Q}-\tilde{P}$, $\alpha_2=\tilde{Q}+\tilde{P}$. 于是,方程(23)可改写为 $\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{GER}}\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{b}^n$, 其中 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{GER}}=(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{G}_1)^{-1}(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{G}_2)$, $\boldsymbol{b}^n=(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{G}_2)^{-1}\boldsymbol{b}_1^n$. 易知, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{GER}}$ 的具体表达式为

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{GER}}=\frac{2}{\beta}\begin{bmatrix}1-(r\tilde{Q})^2 & (1-r\tilde{Q})r\alpha_1 & (r\alpha_1)^2 &&&\\ (1-r\tilde{Q})r\alpha_2 & 1-(r\tilde{Q})^2 & (1+r\tilde{Q})r\alpha_1 &&&\\ & (1+r\tilde{Q})r\alpha_2 & 1-(r\tilde{Q})^2 & (1-r\tilde{Q})r\alpha_1 & (r\alpha_1)^2 & 0\\ & (r\alpha_2)^2 & (1-r\tilde{Q})r\alpha_2 & 1-(r\tilde{Q})^2 & (1+r\tilde{Q})r\alpha_1 & 0\\ &&& \ddots &&\\ & (1+r\tilde{Q})r\alpha_2 & 1-(r\tilde{Q})^2 & (1-r\tilde{Q})r\alpha_1 & (r\alpha_1)^2 &\\ & (r\alpha_2)^2 & (1-r\tilde{Q})r\alpha_2 & 1-(r\tilde{Q})^2 & (1+r\tilde{Q})r\alpha_2 &\\ &&&& \dfrac{(1-r\tilde{Q})\beta}{1+r\tilde{Q}} &\end{bmatrix},$$

其中 $\beta = 1 + 2r\widetilde{Q} + r^2(\frac{ah}{2})^2$. 如果网格比 r 满足条件

$$r \leq \frac{1}{\max(|\widetilde{Q} - \frac{ah}{2}|, |\widetilde{Q} + \frac{ah}{2}|)}, \tag{24}$$

则有 $\|T_{GER}\|_\infty \leq 1$. 从而得到

定理 1 GER(GEL) 格式在条件(24) 下稳定, 其中 $\widetilde{Q}$ 取值如式(20) 所示, 随原始格式的不同而变化.

(2) (S) AGE 格式及(D) AGE 格式. 其中(S) AGE 格式为

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_1)\boldsymbol{u}^{n+1} &= (\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{G}_2)\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{b}_1^n, \\ (\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_2)\boldsymbol{u}^{n+2} &= (\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{G}_1)\boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{b}_2^{n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{b}_2^n = (r(\widetilde{P} + \widetilde{Q})u_0^{n+1}, 0, \cdots, 0, -r(\widetilde{P} - \widetilde{Q})u_m^n)^{\mathrm{T}}$. 此时可写出

$$\boldsymbol{u}^{n+2} = \boldsymbol{T}_s\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{T}_s = (\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_2)^{-1}(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{G}_1)(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_1)^{-1}(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_2)$.

为证明(S) AGE 格式的稳定性, 将用到 Kellogg 引理[7]. 即设 $\rho > 0$, 如果 $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^*$ 为非负定矩阵, 则有估计式 $\|(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{B})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{B})^{-1}\|_2 \leq 1$. 定义矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{T}}_s = (\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_2)\boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_2)^{-1} = (\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{G}_1)(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_1)^{-1}(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{G}_2)(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_2)^{-1}$.

利用 $\boldsymbol{T}_s, \widetilde{\boldsymbol{T}}_s$ 的相似性知其谱半经相等, 即 $\rho(\widetilde{\boldsymbol{T}}_s) = \rho(\boldsymbol{T}_s)$. 从而, 有 $\rho(\boldsymbol{T}_s) \leq \|\widetilde{\boldsymbol{T}}_s\|_2 \leq \|(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}\|_2 \|(I - rG_2)(I + rG_2)^{-1}\|_2$, 而

$$G_1 + G_1^* = 2\widetilde{Q}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

其特征值为 $\mu_{2i-1} = 0, \mu_{2i} = 2, \mu_{m-1} = 1(i = 1, 2\cdots, \frac{m-2}{2})$. 因此, $\boldsymbol{G}_1 + \boldsymbol{G}_1^*$ 为非负定矩阵. 同理 $\boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{G}_2^*$ 也是非负定矩阵, 故由 Kellogg 引理知, $\|(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{G}_1)(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_1)^{-1}\|_2 \leq 1$, $\|(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{G}_2)(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{G}_2)^{-1}\|_2 \leq 1$, 于是有 $\rho(T_s) \leq 1$. 从而有

定理 2 (S) AGE 格式是无条件(弱) 稳定的. 同理可证

定理 3 (D) AGE 格式也是无条件(弱) 稳定的.

4 数值例子

例如, 考虑 Burger′s 方程的初值问题[4]为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in \mathrm{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \qquad x \in \mathrm{R}.$$

在上式 $\varphi(x) = 1.0\ (x \leq 0)$, 或者 $\varphi(x) = 0\ (x > 0)$. 精确解为 $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{x - \xi}{t})\exp(-$

$\frac{G}{2\epsilon})\mathrm{d}\xi / \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{G}{2\epsilon})\mathrm{d}\xi$, 其中 $G(\xi, x, t) = \int_{0}^{\xi} \varphi(\xi')\, d\xi' + \frac{(x-\xi)^2}{2t}$.

在计算中必须取一个有限区间, 取边界条件 $u(-x_{\max}, t) = 1.0$, $u(x_{\max}, t) = 0$, 实际上可取 $-x_{\max} = -10$. 数值结果如表 1～3 所示. 表中 C-AGE(C-ADE), U-AGE(U-ADE), S-AGE(S-ADE) 及 M-AGE(M-ADE) 分别表示基于中心差分格式、逆风格式、Samarskii 格式及修正 Dennis 格式的相应的(D)AGE(ADE)方法.

表 1 结果比较 $\epsilon = 0.001$, $\tau = 0.001$, $h = 0.001$, $t = 0.052$

x	精确解	Evans 格式	U-AGE	U-AGE	S-AGE	M-AGE	MAGE	M-ADE
-1.00	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
-0.15	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.978 95	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.97661
-0.10	1.000 00	0.999 97	1.000 00	0.978 95	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.976 61
-0.5	1.000 00	1.006 67	1.000 00	0.978 95	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.976 61
0.00	1.000 00	0.945 49	0.975 06	0.98 001	1.000 00	0.999 97	0.998 80	0.976 67
0.05	0.000 00	0.000 24	0.000 00	0.000 00	0.000 28	0.000 29	0.000 23	0.000 23
0.10	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
1.00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00

表 2 结果比较 $\epsilon = 0.000\,1$, $\tau = 0.001$, $h = 0.01$, $t = 0.052$

x	精确解	Evans 格式	U-AGE	U-AGE	S-AGE	M-AGE	MAGE	M-ADE
-0.15	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.997 90	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.999 97
-0.10	1.000 00	0.999 45	1.000 00	0.997 90	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.999 97
-0.05	1.000 00	1.015 87	1.000 00	0.997 90	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.999 97
-0.00	1.000 00	1.759 77	0.997 42	0.9997 99	1.000 00	1.000 01	1.000 00	0.999 97
0.05	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
0.10	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00

表 3 结果比较 $\epsilon = 0.000\,01$, $\tau = 0.001$, $h = 0.01$, $t = 0.052$

x	精确解	Evans 格式	U-AGE	U-AGE	S-AGE	M-AGE	MAGE	M-ADE
-0.15	1.000 00	1.000 00	1.000 00	0.999 79	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
-0.10	1.000 00	0.999 37	1.000 00	0.999 79	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
-0.05	1.000 00	1.015 67	1.000 00	0.999 79	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
0.00	1.000 00	1.534 76	0.999 74	0.999 80	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
0.05	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
0.10	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00

数值分析表明以下结果. (1) 各类 AGE 方法均优于相应的同类 ADE 方法. (2) 除了 C-AGE 方法不如 Evans 格式外(因篇幅关系, C-AGE 及 C-ADE 格式数值从略). U-AGE, S-AGE 及 M-AGE 方法均优于 Evans 方法, 在计算中没有出现明显的振荡. 其中尤以基于 Samarskii 格式和修正 Dennis 格式的 S-AGE 方法和 M-AGE 方法精度最高, 不仅对于适中的 ϵ, 且对于小的 ϵ 数值结果与精确解也基本符合. (3) 由(2)可见, 分组显式格式及交替分组显式格式的构成依赖于原来差分格式的一些特殊性质, 此与文[4]的结论相一致. 值得注意的是, S-AGE 方法与文[4]方法雷同, 只是非线性项 $u\frac{\partial u}{\partial x}$ 中系数 u 用 u_j^n 代替文[4]中的 $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$.

参 考 文 献

1 Evans D J, Abdullah A R B. A new explicit method for the diffusion equation[A]. In: Lewis R W, et al. eds. Numerical Methods in Thermal Problems Ⅲ[C]. New York: Pineridge Press, 1983. 330～347

2 Evans D J, Abdullah A R B. The group explicit method for the solution of Burger´s equation[J]. Computing, 1984, 32: 239～253

3 Evans D J, Sahimi M S. The numerical solution of Burger´s equation by the alternating group explieit (AGE) method[J]. Intern. J. Computer Math., 1989, 29: 39～64

4 王子丁, 陆金甫, 肖世江. Burger´s 方程的一个分组显式格式[J]. 计算物理, 1993, 10: 4, 479～487

5 汤华中, 戴嘉尊. Burger´s 方程的一类组显式差分格式[J]. 南京理工大学学报, 1995, 19(1): 53～57

6 陆金甫. 对流-扩散方程的一些单调性差分格式[J]. 计算物理, 1991, (2): 157～164

7 康立山, 全惠云. 数值解高维偏微分方程[M]. 上海: 上海科技出版社, 1990. 8～10

Several Alternating Group Explicit Method for Solving Burger´s Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For solving Burger´s equation, several new alternating group explicit (AGE) methods which are known as C-AGE, U-AGE, S-AGE and M-AGE methods are constructed on the basis of central difference scheme, explicit upwind scheme, Samarskii scheme and modified Dinnes scheme. A discussion is devoted to the linearized stability of these methods. In addition to C-AGE methods, the AGE methods presented here is obviously better than Evans' group explicit method for solving Burger´s equation with a large Reynold´s number.

Keywords Burger´s equation, alternating group explicit scheme, stability