

文章编号 1000-5013(2000) 02-0172-06

# 插板法测表面张力公式的新证明及讨论

冉茂宇<sup>①</sup> 陈经纬<sup>②</sup>

(<sup>①</sup> 华侨大学建筑系, 泉州 362011; <sup>②</sup> 厦门鼓浪屿风景区建设开发公司, 厦门 361000)

**摘要** 从力平衡的角度, 建立固液接触角为零度时插板外液体的物理数学模型, 推导证明液体表面形状曲线方程. 然后证明固液接触角不为零度时的一般情况, 为测量依据公式提供一种新的证明方法. 最后, 通过讨论得出 3 点有意义的结论. (1) 对于一定的液体, 不同材料插板所引起液体上升的实际高度不同, 但最高固液接触点都落在同一曲线上. (2) 可以通过测量直线距离代替接触角的作测, 以提高表面张力的精度. (3) 由直线距离测量所得表面张力测量的相对误差, 是直线距离测量相对误差的两倍.

**关键词** 插板法, 表面张力, 接触角

中图分类号 O 484. 5

文献标识码 A

测量液体表面张力或固液接触角, 插板法是一种方便、较准确的方法. 这种方法赖以存在

的依据是公式  $h = \frac{2T_0}{\gamma} (1 - \sin\alpha)$ . 其中  $h$  是液体在插板外表面的上升高度,  $T_0$  是液体的表面张力,  $\gamma$  是液体的重度,  $\alpha$  为固液接触角. 该公式的一种简单推导方法是以经典的拉普拉斯公式为基础直接推导<sup>[1]</sup>. 本文从受力平衡的角度提供一种新的推导证明方法. 与用拉普拉斯公式推导的方法相比, 该方法具有物理概念清晰和直观性强的优点.

## 1 固液接触角为零时插板外液体表面形状取向

如图 1 所示, 当固液接触角为 0 时, 固液接触最高点 A 为液面曲线与插板外表面的相切点. 由于垂直插板左右液体表面形状对称, 故取右边液体部分进行分析. 建立直角坐标系 (如图 1 所示),  $x$  轴取水平方向且通过 A 点, 正向向右,  $y$  轴取为垂直方向, 正向向下. 设固液接触最高点 A 与原点的距离为  $a$ , 与水平无穷远处液体表面的垂直距离为  $H$ . 设液体的表面张力为  $T_0$ , 重度为  $\gamma$ , 大气压力为  $P_a$ . 在

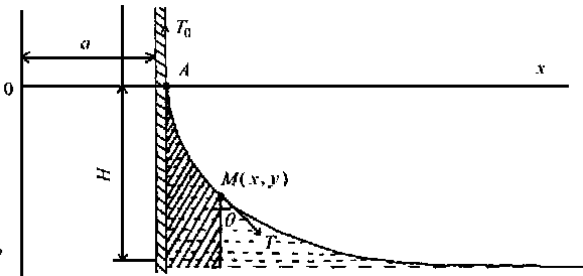


图 1 固液接触角为零时液体表面形状取向

液面曲线上任取一点  $M(x, y)$ , 其切线与垂直方向的夹角为  $\theta$  取图中阴影部分液体进行受力平衡分析, 考虑垂直纸面 1 个单位厚度.

垂直方向为  $T_0 + P_a(x - a) = \int_a^x (H - y) dx + P_a(x - a) + T \cos \theta$ , 整理得

$$T \cos \theta = T_0 - \int_a^x (H - y) dx. \quad (1)$$

水平方向为  $T \sin \theta + H(P_a - \frac{H}{2} \gamma) = (H - y)[P_a - \frac{H - y}{2} \gamma] + y P_a$ , 整理得

$$T \sin \theta = H \gamma y - \frac{1}{2} \gamma y^2. \quad (2)$$

由式(1), (2) 得

$$\tan \theta = \frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{H \gamma y - \frac{1}{2} \gamma y^2}{T_0 - \int_a^x (H - y) dx} = \frac{dx}{dy},$$

整理后得

$$(H \gamma y - \frac{1}{2} \gamma y^2) \frac{dx}{dy} = T_0 - \int_a^x (H - y) dx. \quad (3)$$

将式(3)两边对  $x$  求导整理后, 可得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2(H - y)}{2H y - y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{2(H - y)}{2H y - y^2}. \quad (4)$$

令  $z = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ , 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dy}$ . 因此, 式(4)变为

$$\frac{dz}{dy} + \frac{4(H - y)}{2H y - y^2} z = -\frac{4(H - y)}{2H y - y^2}. \quad (5)$$

式(5)为一阶线性非齐次方程. 令  $p(y) = \frac{4(H - y)}{2H y - y^2}$ , 则式(5)的通解<sup>[1]</sup>为

$$z = C_1 e^{-\int p(y) dy} + e^{-\int p(y) dy} \int p(y) e^{\int p(y) dy} dy.$$

化简得

$$z = C_1 (2H y - y^2)^{-2} - 1. \quad (6)$$

代入条件  $y = H$  时,  $\frac{dy}{dx} = 0, z = 0$ , 得  $C_1 = H^4$ . 代入式(6)得

$$z = \frac{H^4}{(2H y - y^2)^2} - 1, \quad (7a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H - y}{2H y - y^2} \sqrt{H^2 + 2H y - y^2}. \quad (7b)$$

当  $y = 0$  时,  $\frac{dy}{dx} = \frac{H}{2H} = \frac{1}{2}$ , 即  $\frac{dx}{dy} = 0$  自然满足. 式(7b) 分离变量并作变换, 可得

$$dx = \frac{H^2 - (H - y)^2}{H - y} \frac{d(H - y)}{2H^2 - (H - y)^2}. \quad (8)$$

令  $H - y = \varphi$  式(8)变为

$$dx = \frac{H^2 - \varphi^2}{\varphi} \frac{d\varphi}{2H^2 - \varphi^2}. \quad (9)$$

积分式(9), 得其通解为

$$x = \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H} + \sqrt{2H^2 - \Phi}}{\Phi} - \sqrt{2H^2 - \Phi} + C_2.$$

将  $\Phi = H - y$  代入上式, 得

$$x = \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H} + \sqrt{2H^2 - (H - y)^2}}{H - y} - \sqrt{2H^2 - (H - y)^2} + C_2. \quad (10)$$

由  $y = 0, x = a$  时, 可得  $C_2 = a + H - \frac{H}{2} \ln(\sqrt{2} + 1)$ . 将  $C_2$  代入式(10), 可得到表面的曲线方程为

$$x = \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H} + \sqrt{2H^2 - (H - y)^2}}{H - y} - \sqrt{2H^2 - (H - y)^2} + a + H - \frac{H}{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \quad (11)$$

对于式(11)若取  $a = \frac{H}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - H$  时, 则其可简化为

$$x = \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H} + \sqrt{2H^2 - (H - y)^2}}{H - y} - \sqrt{2H^2 - (H - y)^2}, \quad (12a)$$

$$x = \frac{\sqrt{2H} \ln \frac{\sqrt{2H} + \sqrt{2H^2 - (H - y)^2}}{H - y}}{2} - \sqrt{2H^2 - (H - y)^2} - \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H} + \sqrt{2H^2 - (H - y)^2}}{H - y}. \quad (12b)$$

式(12b)右边前两项为关于  $(H - y)$  的曳物线曲线<sup>[6]</sup>, 第三项为关于  $\frac{\sqrt{2H}}{H - y}$  的反双曲余弦函数.

## 2 关于 $H$ 的确定

对于水平表面以上的所有液体, 显然有

$$T_0 = \int_0^H (x - a) \gamma dy. \quad (13)$$

将式(11)代入式(13)并积分, 得

$$T_0 = \gamma \int_0^H \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H} + \sqrt{2H^2 - (H - y)^2}}{H - y} dy - \gamma \int_0^H \sqrt{2H^2 - (H - y)^2} dy + \gamma \int_0^H [H - \frac{H}{2} \ln(\sqrt{2} + 1)] dy. \quad (14)$$

在式(14)中右边的第一项采用分部积分, 结果为  $H^2 \gamma (\frac{\pi}{4} + \frac{\ln \frac{\sqrt{2} + 1}{2}}{2})$ ; 第二项采用变量变换积分, 结果为  $-H^2 \gamma (\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$ ; 第三项直接积分, 结果为  $\gamma H^2 - \frac{\gamma H^2}{2} \ln(\sqrt{2} + 1)$ . 把三项积分结果代入式(14), 整理得到  $T_0 = \frac{1}{2} H^2 \gamma$ . 由此可得

式(15)为固液接触角为 0 时,液体在插板外表面上升高度  $H$  与其表面张力  $T_0$  的关系.

### 3 固液接触角为 $\alpha$ 时一般关系的证明

当固液接触角不为 0 时,液体在插板外表面上升高度  $h$  将小于  $H$ . 可以将液面形状看成是接触角为 0 时所形成液面形状的一部分,如图 2 所示. 延长液面曲线(虚线),可以得到与其相对应的接触角为 0 时的高度  $H$ . 为了讨论方便,此处将  $H$  称为液体上升的理想高度,将  $h$  称为液体上升的实际高度. 在实际高度  $h$  接触点处,有  $y = H - h$ ,代入式(7a)整理得

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{H^4}{[2H(H-h) - (H-h)^2]^2 - 1}. \tag{16}$$

即  $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{H^4}{(H^2 - h^2)^2}$  或  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{H^4}{(H^2 - h^2)^2}$ , 整理得

$$h^2 = H^2(1 - \sin \alpha). \tag{17}$$

将式(15)代入式(17),可得  $h^2 = \frac{2T_0}{\gamma}(1 - \sin \alpha)$ . 即

$$h = \sqrt{\frac{2T_0}{\gamma}(1 - \sin \alpha)}, \tag{18}$$

式(18)即为液体在插板表面上升高度的普遍计算式. 只要知道  $h, T_0, \alpha$  中的两个参数,就可以求出第 3 个参数. 这就是插板法测表面张力  $T_0$  或固液接触角  $\alpha$  的依据.

### 4 关于插板法测量表面张力的讨论

由上述推导证明可知,对于一定的液体,与不同材料制成的插板接触时,液体在插板外表面上升的实际高度  $h$  不同. 但是,液体表面所形成的形状曲线是不变的,固液最高接触点都落在式(11)所描述的曲线上.

利用插板法测量表面张力时,通常采用照像放大技术. 先测出液体在固体表面上升的实际高度  $h$ , 然后通过最高接触点作表面曲线的切线,量出其夹角  $\alpha$ ,再利用式(18)计算表面张力  $T_0$ <sup>[8]</sup>. 这种测量方法的误差主要来源是切线很难作测准确,导致  $\alpha$  测量值有很大误差. 如果能将作测夹角  $\alpha$  转换为作测直线距离,则可以提高表面张力的测量精度. 记固液接触最高点为  $(x_1, H - h)$ ,在液面曲线上任取一点  $N$ ,其坐标记为  $(x_2, H - h_1)$ . 由式(11)可得

$$x_1 = \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H + h} \sqrt{2H^2 - h^2}}{h} - \frac{\sqrt{2H^2 - h^2}}{2H^2 - h^2} + \alpha + H - \frac{H}{2} \ln(\sqrt{2} + 1), \tag{19}$$

$$x_2 = \frac{H}{2} \ln \frac{\sqrt{2H + h_1} \sqrt{2H^2 - h_1^2}}{h_1} - \frac{\sqrt{2H^2 - h_1^2}}{2H^2 - h_1^2} + \alpha + H - \frac{H}{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \tag{20}$$

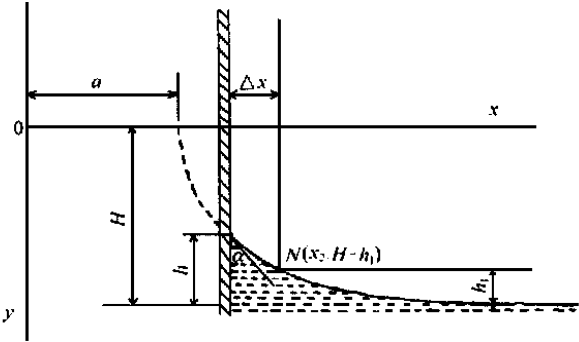


图 2 固液接触角不为零时的一般表示

由式(20), (19) 两式相减得

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{H}{2} \ln \left( \frac{\frac{2H}{2H+h_1} + \frac{2H^2-h_1^2}{2H^2-h^2}}{\frac{2H}{2H+h_1} + \frac{2H^2-h^2}{2H^2-h_1^2}} \right) + \frac{2H^2-h^2}{2H^2-h_1^2} - \frac{2H^2-h_1^2}{2H^2-h^2}. \quad (21)$$

因此, 只要测出固液最高接触点高度  $h$ ,  $N$  点距插板表面水平距离  $\Delta x$  及其相对于水平面高度  $h_1$ , 则可由式(21) 迭代求出其理想高度  $H$ . 从而可直接利用公式(15) 和(17), 分别求出表面张力  $T_0$ , 固液接触角  $\alpha$ . 这样就把作测  $\alpha$  角转换成求测直线距离  $\Delta x$  和  $h_1$ .

在这种测量方法中, 理想高度  $H$  通过迭代计算得到. 其精度可以通过设置高精度等级、增加迭代次数来提高, 以尽可能逼近其真实解, 故可以认为该方法的测量误差迭代计算过程不受影响, 仅仅由直线距离的测量引起.

设  $\Delta x, h_1, h$  为真值, 则由迭代计算所得  $H$  也为真值. 由式(21) 可知, 各真值应满足的关系为

$$\frac{\Delta x}{2H} = \frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left( \frac{2H}{h_1} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left( \frac{2H}{h} \right) + \frac{1 - \left( \frac{h}{2H} \right)^2}{1 - \left( \frac{h_1}{2H} \right)^2}. \quad (22)$$

若直线距离的测量结果具有相对误差  $e$ , 由迭代计算所得假值  $H^*$  具有相对误差  $f$ , 则各假值应满足的关系为

$$\frac{\Delta x(1+e)}{2H(1+f)} = \frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left[ \frac{2H(1+f)}{h_1(1+e)} \right] - \frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left[ \frac{2H(1+f)}{h(1+e)} \right] + \frac{1 - \left[ \frac{h(1+e)}{2H(1+f)} \right]^2}{1 - \left[ \frac{h_1(1+e)}{2H(1+f)} \right]^2}. \quad (23)$$

令  $\frac{1+e}{1+f} = \frac{1}{k}$ , 则式(23) 可改写为

$$\frac{\Delta x}{2H} = k \left[ \frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left( k \frac{2H}{h_1} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-1} \left( k \frac{2H}{h} \right) + \frac{1 - \left( \frac{h}{2kH} \right)^2}{1 - \left( \frac{h_1}{2kH} \right)^2} \right]. \quad (24)$$

比较式(22), (24) 可知, 当且仅当  $k=1$  时, 式(24) 成立. 故有

$$f = e. \quad (25)$$

式(25) 说明, 迭代计算解  $H^*$  的相对误差与直线距离测量相对误差相等.

设由假值  $H^*$  引起表面张力的相对误差为  $g$ , 则由式(15) 应有

$$T_0(1+g) = \frac{1}{2} [H(1+e)]^2 \gamma = \frac{1}{2} H^2 \gamma (1+e)^2. \quad (26)$$

比较式(26), (15) 得

$$g = 2e + e^2. \quad (27)$$

式(27) 说明在直线测量方法中, 表面张力的相对误差将是直线距离测量相对误差的两倍. 因此, 减小直线距离的测量误差是提高表面张力精度的关键. 在实验中, 仍可用照像、摄像放大技术来提高直线距离测量的精度. 另外, 如果插板是由透明材料制成, 厚度适中且表面均匀光

滑,则在实验中可仅让其一面与液体接触.从另一面水平目测固液最高接触处的分界线.这种方法对于有色液体尤为方便、准确.对于无色的液体,可以通过在液体中添加少量显色剂来实现.这对于固液接触角为零度的情形同样适合.这样就可以较准确地判断固液接触最高点的位置,从而提高测量精度.

5 结论

本文从力平衡角度,为插板法测表面张力公式提供了新的推导证明方法.通过讨论得出了 3 点有意义的结论.(1) 一定的液体,与不同材料插板接触时,虽然液体在插板外表面上升的实际高度不同,但液体外表面形状曲线是不变的.(2) 可以通过测量直线距离推算其理想高度,再求得表面张力或固液接触角,从而避免对接触角的作测.(3) 由直线距离测量所得表面张力的相对误差是直线距离测量相对误差的两倍.

参 考 文 献

1 程传煊.表面物理化学[M].北京:科学技术文献出版社,1995.130~131  
2 同济大学数学教研室编.高等数学[M]:下册.北京:高等教育出版社,1982.326~327  
3 中国矿业学院数学教研室编.数学手册[M].北京:科学出版社,1980.58~59  
4 朱瑶,赵振国.界面化学基础[M].北京:化学工业出版社,1996.24~34

New Proof and Discussion on the Formula for Measuring  
Surface Tension by Neumann Method

Ran Maoyu<sup>①</sup> Chen Jingwei<sup>②</sup>

(<sup>①</sup> Dept. of Arch., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou;

<sup>②</sup> Gulangyu Scenic Spot Constr. & Devel. Co., 361000, Xiamen)

**Abstract** From the angle of force-balance, a physical and mathematical model of liquid outside the insert plate when the angle of solid-liquid contact equals to zero is established; and the surface curve shape of liquid is derived and proved. And then, the general conditions during which the angle of solid-liquid unequal to zero degree are derived and proved. By way of discussion, three meaningful conclusions are obtained: (1) For a certain liquid, the actual height of the rise of the liquid differs with the insert plates of different materials, however, all the highest points of solid-liquid contact fall on the same curve. (2) The accuracy of the surface tension can be promoted by measuring line distance instead of angle of contact. (3) The relative errors for surface tension calculated by line distance are twofold of the relative errors for measuring line distance.

**Keywords** plate insertion method, surface tension, angle of contact