第21卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.21 No.2
2000年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr.2000

文章编号 1000-5013(2000)02-0164-04

框架动力优化的内点二次规划法

吴 扬 王全风

(华侨大学土木工程系,泉州 362011)

摘要 首次将内点序列二次规划法应用于框架结构的动力优化领域,并作为二次规划算法的求解器,改善整个优化问题的运算效率.通过算例的结果分析,说明本方法是可行的、有效的.

关键词 框架,动力优化,内点,二次规划

中图分类号 TU 398+.101 文献标识码 A

结构优化问题可以表达为数学规划问题.但是多数问题的约束函数,乃至目标函数,都只是象征性地写成设计变量 X 的函数,根本写不出显函数.这是求解的最大障碍.人们可以从力学或从数学上.将约束或目标函数化为变量或倒变量的一阶近似显函数,但还有如下问题有待解决.(1) 大量约束中,很多是无效或相关的,不少优化方法收敛太慢或完全失效.(2) 性态约束本质上是设计变量的非线性函数.(3) 对所有约束皆采用一阶近似,在实际结构优化时,就有计算量太大,乃至不能接受的困难.(4) 工程中常用的单元,如梁或板、壳,其设计变量的选取是一件十分困难的事.针对以上问题,文[1]做了大量工作,其中一项工作就是将序列二次规划(SQP)引入结构优化领域.但是,二次规划的求解效率影响着SQP的求解效率,内点法就是一种二次规划法的求解器[2].大规模结构优化技术需要高效率的算法.理论上,内点法和序列二次规划法相对于其它方法,具有明显的优势.如何把这些方法应用于结构优化,使其成为好的结构优化方法,是值得研究的课题.本文在以往工作的基础上再做推广,将内点序列二次规划法引入框架结构的动力优化领域.本论述,国内有关文献尚未见报道.

1 框架结构动力优化的数学模型

框架结构动力优化的一般教学模型[3]为

求X,则

$$\left.\begin{array}{l} \min W = 2\sum_{i=1}^{n} r_i l + \sum_{i=n+1}^{2n} r_i l_i A_i X_i^{-b_i}, \qquad \text{s.t.}\ \sigma_{\max i} \le \sigma_i^* \ (i=1,2,\cdots,2n), \\ \Delta_i \le \Delta_i^* \ (i=1,2,\cdots,n), \qquad \delta_n \le \delta_n^*,\ -\omega_1^2 \le -(\omega_1^*)^2, \\ \underline{X}_i \le X_i \le \overline{X}_i (i=1,2,\cdots,2n), \qquad X_i \le X_{i+1} (i=1,2,\cdots,n-1). \end{array}\right\} \tag{1}$$

式中 X_i 为框架构件截面惯性矩的倒数,W 为框架结构总重量,n 为层数,r_i 为容重,l_i 为各杆

收稿日期 1999-09-17 作者简介 吴 扬(1974-),男,助教

长度, A_i 为各杆的截面积. $\sigma_{\max i}$ 和 σ_i^* 分别为杆件最大应力和它的容许值. Δ_i 和 Δ_i^* 分别为框架层间相对位移和它的容许值; δ_n 和 δ_n^* 分别为顶层最大位移和它的允许值, ω 和 ω^* 分别为框架第一固有频率和它的容许值, $\underline{X}_i$ 和 $\overline{X}_i$ 分别为设计变量 X_i 的上、下限.

2　数学模型的二次规划表达式

分别对应力、位移、频率的约束作 Taylor 展开, 取其一次项, 得到了线性约束关系. 将目标函数作 Taylor 展开, 取其二次项. 将以上展开式代入基本的二次规划模型, 得

$$\min f(x) = \frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}HX + C^{\mathrm{T}}X, \qquad \text{s.t. } AX \leq B. \tag{2}$$

可得本文的二次规划表达式为

$$\left.\begin{array}{c}
\min W(x) = \frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}HX + C^{\mathrm{T}}X, \\
\text{s.t.} [\tau^0]_{2n\times 2n}\{X\}_{2n\times 1} \leq \{S^*\}_{2n\times 1}(\text{应力约束}), \\
-\{\psi\}^{\mathrm{T}}_{1\times 2n}\{X\}_{2n\times 1} \leq -T^*(\text{频率约束}), \\
[\mu]_{(n+1)\times 2n}\{X\}_{2n\times 1} \leq \{R^*\}_{(n+1)\times 1}(\text{位移约束}), \\
[I]_{2n\times 2n}\{X\}_{2n\times 1} \leq \{\overline{X}\}_{2n\times 1}(\text{几何约束}), \\
-[I]_{2n\times 2n}\{X\}_{2n\times 1} \leq \{\underline{X}\}_{2n\times 1}\text{和 } [\theta]_{(n-1)\times n}\{X\}_{n\times 1} \leq \{0\}_{(n-1)\times 1}(\text{几何约束}).
\end{array}\right\} \tag{3}$$

式中 $H = \nabla^2 W_0$, $\nabla^2 W_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\partial^2 W}{\partial X_{2n}^2} \end{bmatrix}_{X^0}$, $C = \overline{C} - HX^0$, $\overline{C} = \nabla W_0$, $\nabla W = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial W}{\partial X_{2n}} \end{Bmatrix}_{X^0}$,

$[\tau^0]_{2n\times 2n} = \begin{bmatrix} \tau_{11}^0 & & & 0 \\ & \tau_{22}^0 & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & \tau_{2n2n}^0 \end{bmatrix}$, $\tau_{ii}^0 = \frac{M_i^0}{c_i}d_i(X_i^0)^{d_i-1} + \frac{N_i^0}{a_i}b_i(X_i^0)^{b_i-1}$. 而其中, M_i^0 和 N_i^0 分别为当前设计变量得到的第 i 个单元的最大弯矩, 以其对应的轴力值. a_i, b_i, c_i, d_i 均为常数, 其值与截面特性有关. $\{S^*\} = \{\sigma^* - \sigma^0\}$, $\mu_{n+1,j} = \begin{cases} \mu_{jj}(j = 1, 2, \cdots, n), \\ \mu_{j-n,j}(j = n+1, n+2, \cdots, 2n), \end{cases}$ $\mu_{jj} = \frac{V_j l_{cj}^3}{24E}\cdot\left[1 + \frac{3l_{bj}^2(X_{n+1}^0)^2}{(2l_{cj}X_j^0 + l_{bj}X_{n+1}^0)^2}\right]$, $\mu_{j,n+1} = \frac{V_j l_{cj}^4 l_{bj}(X_j^0)^2}{4E(2l_{cj}X_j^0 + l_{bj}X_{n+1}^0)^2}$, $R_i^* = \Delta_i^* - \Delta_i^0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, $R_{n+1}^* = \delta_n^* - \Delta_1^0$, V_i 为第 i 层的层剪力, l_{ci} 和 l_{bi} 分别为第 i 层柱和梁的长度, $\psi = \frac{\partial\omega^2}{\partial X}\Big|_{X=X^0}$, $T^* = (\omega^*)^2 - \omega^2(X^0) + \frac{\partial\omega^2}{\partial X}\Big|_{X=X^0}X^0$, $\begin{cases} \theta_j = 1, \\ \theta_{j,j+1} = -1(j = 1, 2, \cdots, n-1). \end{cases}$

3　内点二次规划法

内点二次规划法利用代理约束思想, 将普通二次规划问题化为其代理规划问题. 然后, 再利用 Kuhn-Tucker 条件, 得到显式的代理对偶问题. 最后, 找出显式对偶问题对隐式对偶问

题具有继承性的条件,即无约束极小点不满足参与运算的约束．用解线性规划问题的Kar-markar方法中的变换,求解显式的对偶问题．这个方法的一个特点是,对偶目标函数在Kar-markar变换下不变形,使得在变换后可以保持对偶函数的凸性．其次,给出了求解多约束情况下,二次规划问题的一个拟有效集算法,根据无约束极小点来决定参与运算的约束．一般的解约束优化的代理方法,都是通过求出一系列的代理对偶问题(S)的解,从而可以找到原问题(P)的解X^*．每一个代理问题对应一组代理乘子$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)^T$,代理方法的迭代过程一般是在$X$空间和$\lambda$空间交互进行．一种较典型的方法就是:先给出问题($S$)的一个初始乘子$\lambda^0$,求解问题($S$)得到解$X^0$,然后代理乘子$\lambda^0$修正(或变化)为$\lambda^1$,再解问题($S$)得解$X^1$．重复这个过程直到$(\lambda^0,X^0),(\lambda^0,X^1),\cdots,(\lambda^r,X^r),\cdots$收敛到问题($S$)的解为止,从而也是问题($P$)的解．对偶问题的特殊形式另外体现在约束是一个单纯形约束．绝大多数数学规划方法都可归结为边界算法,即每次的迭代解是在可行域的边界上,迭代解沿着可行域的边界向最优解带近．而内点法则是在可行域的内部,构造一个向最优解逼近的可行解序列．Karmarkar方法的第一步是把线性规划的一般标准形转化成Karmarkar的标准形,Karmarkar标准形中有个约束就是单纯形约束,这同得到的代理对偶问题的约束是完全一样的．同时,Karmarkar又构造了一种从单纯形到单纯形的变换．正是利用这种变换,才使得解总是在可行域的内部,且总能按某一步长向最优解靠近．Karmarkar算法[2]构造了,从单纯形的变换可以将现行内点变换到可行域的中心附近．从而可以在该点沿下降方向移动,而且能使解得到显著的改进．利用前面论述的算法,求得上面这个子问题的解为X^1,下一步就要以X^1为起点,寻求一个二次规划子问题,并求得其解X^2．本方法在子二次规划问题求解中利用了拟有效集策略,只有有效约束才加入迭代,在提高算法的效率方面所具有的好处是显然的．该内点二次规划法主要步骤[2]有以下几点．(1)利用代理约束的思想,构造约束为单纯形显式的对偶问题．(2)无约束极小点来判断所参与运算的有效约束,解不等式约束的子问题．(3)通过Karmarkar的投影尺度,变换来求解对偶问题．(4)规定全局收敛准则,当下面任何一种情况出现时算法停止．(a)结构优化所得的重量与上一次优化所得重量的相对差值满足$|w^k-w^{k-1}|/w^{k-1}\leq\epsilon_2$;(b)设计变量的再次迭代所得结果之差的模满足$\|X^{k-1}-X^k\|\leq\epsilon_2$,其中$\epsilon_1,\epsilon_2$是收敛精度．

4 工程实例

采用文献[3]的算例1,其具有6层钢筋混凝土框架,层高3.5 m,跨度5.5 m.梁受均布荷载作用,顶层为15 kN·m^{-1},其余层为25 kN·m^{-1}.结构为八度抗震设防,Ⅲ类场地土,近震.初始柱断面为0.4 m×0.4 m,梁断面为0.3 m×0.6 m.砼强度等级为C20,钢筋采用Ⅱ级钢.应力上限值1.1×10^4 kN·m^{-2},层间相对位移上限值0.008 m,顶层最大位移限值0.035 m,频率下限值7 s^{-1},柱、梁设计变量下限值为零．

4.1 优化的结果

经5次迭代,最优结果$W=233.5608$(kN)．与文献[4]的结果$W=263$(kN)和迭代次数8次相比,本文所计算出的总重量较轻,迭代次数也较少．

4.2 迭代过程分析

(1)在整体优化的初始点处,形成了1个二次规划模型,即进入内点法的求解程序．首

先, 判断无约束极小点所违反的约束, 编号为 1, 2, 3, 4 和 20. 其中, 1, 2, 3, 4 是应力约束, 20 是频率约束 . 得出第 1 个二次规划模型的第 1 个迭代点后, 再判断在第 1 个迭代点处所违反的约束 . 计算表明, 第 1 个迭代点满足所有约束, 计算继续进行 . (2) 得到整体优化的第 1 迭代点后, 将形成第 2 个二次规划模型, 也将再次进入内点法, 的求解程序 . 判断无约束极小点所违反的约束, 编号为 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 和 20. 得出第 3 个二次规划模型的第 1 个迭代点 后, 再次判断在第1个迭代点处所违反的约束. 一直到第5个迭代点, 判断在第5个迭代点处所违反的约束. 结果不违反任何一个约束. 以上的迭代过程提出内点法及拟有效集的求解策略, 每次更新不止一个约束.

4. 3　不同的初始值结果的比较

表 1 为采用 3 组不同的梁柱断面初始值结果的比较. 从表可知, 使用本方法进行计算, 梁柱初始断面取不同值对计算结果影响不大.

表 1　不同梁柱断面(m×m) 的初始值比较

柱断面	0. 35×0. 35	0. 40×0. 40	0. 40×0. 40
梁断面	0. 30×0. 50	0. 35×0. 60	0. 30×0. 60
目标值 W/kN	233. 591 9	233. 573 3	233. 560 8
迭代次数	5	4	5

5　结论

本算法采用拟有效集策略, 每次更新不止一个约束, 最多可以和设计变量相同, 这显然提高了运算效率. 该算法的另一个明显优点, 是不需要知道初始可行解, 而以无约束极小点为起点. 一般的解二次规划的算法几乎都是两阶段算法, 在第 1 阶段找一个可行解, 而在第 2 阶段找最优解, 再通过它来找原问题的可行解. 这个算法虽然也可以理解为两阶段算法, 但由于第 1 阶段所找到的可行解离最优解很近, 所以第 2 阶段所用时间很少, 几乎就是一阶段算法.

参　考　文　献

1　钱令希, 钟万勰. 程耿东等工程结构优化的序列二次规划[J] . 固体力学学报, 1983, (4): 469～480

2　宣兆成 . 二次规划的代理对偶算法及其在结构分析与优化中的应用[D] : [学位论文] . 大连: 大连理工大学土木工程系, 1998

3　欧阳义为, 王全凤 . 多层框架动力优化的序列二次规划法[J]. 工程力学, 1995, (增刊) : 2 195～2 199

Sequential Quadratic Programming of Inner Point for Dynamic Optimization of Frame Structure

Wu Yang　　Wang Quan feng

(Dept. of Civil Eng. , Huaqiao Univ. , 362011, Quanzhou)

Abstract　For the first time, the authors apply sequential quadratic programming of inner point as a solver to algorithm of quadratic programming for dynamic optimization of frame structure. By which the operational efficiency of the whole problem of optimization can be improved. This is a feasible and effective method, as proved by the analysis of results from numerical example.

Keywords　frame structure, dynamic optimization, inner point, sequential quadratic programming