第 21 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.21　No.2
2000 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr.2000

文章编号　1000-5013(2000)02-0124-05

抛物型方程的一族高精度恒稳格式

黄浪扬　　曾文平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　对二阶抛物型方程 $u_t = u_{xx}$, 构造了一族新的三层隐式差分格式(在特殊情况下是两层). 它们含有非负参数 α_1, α_2 和 α_3, 其截断误差至少可达 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$. 对三层格式, 在条件 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ 及 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 之下绝对稳定. 特别地, 在条件 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3$ 或 $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 0$ 之下成为两层不含参数的隐式格式, 且也是绝对稳定的. 这些格式均可用追赶法求解. 在该格式中, 选取适当的参数, 可得抛物型方程初边值差分格式中的高精度格式.

关键词　二阶抛物型方程, 绝对稳定, 高精度, 隐式差分格式

中图分类号　O 241.82　　文献标识码　A

本文考虑如下的抛物型方程初边值问题, 即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \\ &u(0, t) = g_1(t), \quad u(L, t) = g_2(t), \quad t > 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

解上述问题, 人们已建立了各种各样的差分格式[1~4]. 本文构造了一族三层(在特殊情况下是两层)含参数、高精度、绝对稳定、三对角型的隐式差分格式, 其截断误差阶至少为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$(特殊情况下还可以提高), 它包含了文[1~4]中的所有高精度恒稳格式.

1　差分格式的构造

现设问题(1)的解 $u(x, t)$ 充分光滑, 时间步长为 Δt, 空间步长为 Δx, 并设 $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ 为网格比, 在网点 (x_m, t_n) 处的网格函数 $u(x_m, t_n)$ 记为 u_m^n. 利用 Taylor 展开不难验证下列数值微分公式为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^{n+1} = \frac{1}{2\Delta t}(3u_m^{n+1} - 4u_m^n + u_m^{n-1}) + \frac{(\Delta t)^2}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_m^{n+1} + \cdots, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^{n} = \frac{1}{2\Delta t}(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) - \frac{(\Delta t)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_m^{n} + \cdots, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^{n-1} = \frac{1}{2\Delta t}(-u_m^{n+1} + 4u_m^n - 3u_m^{n-1}) + \frac{(\Delta t)^2}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_m^{n-1} + \cdots. \tag{4}$$

收稿日期　1999-11-18　　作者简介　黄浪扬(1974-), 男, 助教

引入记号

$$\Delta_h u_m^n = u_{m+1}^n + 10u_m^n + u_{m-1}^n, \qquad L_h u_m^n = u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n, \tag{5}$$

则有

$$\frac{1}{12}\Delta_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n = \frac{1}{(\Delta x)^2}L_h u_m^n + \frac{(\Delta x)^4}{240}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_m^n + \frac{(\Delta x)^6}{24\ 192}\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\right)_m^n + O((\Delta x)^8). \tag{6}$$

将式(6)用于方程(1), 便得到下面 3 个差分格式为

$$\frac{1}{12}\Delta_h\frac{3u_m^{n+1} - 4u_m^n + u_m^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2}L_h u_m^{n+1}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{12}\Delta_h\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2}L_h u_m^n, \tag{8}$$

$$\frac{1}{12}\Delta_h\frac{-u_m^{n+1} + 4u_m^n - 3u_m^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2}L_h u_m^{n-1}. \tag{9}$$

由 $\alpha_1\times(7) + \alpha_2\times(8) + \alpha_3\times(9)$, 可得到如下含三参数的三层隐式差分格式为

$$\frac{1}{12}\Delta_h\frac{(3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)u_m^{n+1} - 4(\alpha_1 - \alpha_3)u_m^n + (\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3)u_m^{n-1}}{2\Delta t} =$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}L_h(\alpha_1 u_m^{n+1} + \alpha_2 u_m^n + \alpha_3 u_m^{n-1}). \tag{10}$$

(Ⅰ) 三层情况. 当 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 时, 利用等式 $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$, 便得其相应的局部截断误差为

$$R = \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{240r^2}\right)(\Delta t)^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_m^n - \frac{5(\Delta x)^6}{24\ 192}\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\right)_m^n + O((\Delta t)^3 + (\Delta x)^8).$$

所以, 三层格式(10)的截断误差至少可达 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$. 若令 $(\Delta t)^2$ 项的系数为 0, 得 $\alpha_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{120r^2}$ 时的局部截断误差为 $O((\Delta t)^3 + (\Delta x)^6)$. 这时, 由下面所得的稳定性条件之 $\alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ 推得稳定性限制为 $r \leq \frac{1}{20}$(当然还要附加其它稳定性限制 $\alpha_1 \geq \alpha_3 \geq 0$, $\alpha_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{120r^2}$ 以及 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). 但由于 $(\Delta x)^6$ 的存在, 已不能选取非负参数使差分格式(10)的精度更高而又绝对稳定.

(Ⅱ) 两层情况. 当 $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 0$ 时, 利用等式 $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$, 便得其相应的局部截断误差为

$$R = \frac{\alpha_1}{6}\left(1 - \frac{1}{20r^2}\right)(\Delta t)^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_m^n + O((\Delta t)^3 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + \Delta t(\Delta x)^4 + (\Delta x)^8).$$

所以, 当 $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 0$ 或当 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3$ 时, 其截断误差至少为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$. 若令 $(\Delta t)^2$ 项的系数为 0, 得 $r = \frac{1}{20}$ 时的局部截断误差为 $O((\Delta t)^3 + (\Delta x)^6)$.

2　差分格式稳定性与收敛性

引理　Miller 准则. 设 $A > 0$, 实系数二次方程 $AX^2 + BX + C = 0$ 的两根按模小于等于 1 的充要条件是 $A - C \geq 0$, $A + B + C \geq 0$, $A - B + C \geq 0$.

用 Fourier 方法[ ]分析差分格式(10)的稳定性. 令 $u_m^n = \lambda^n e^{im\theta}$, ($i = \sqrt{-1}$, $|\theta| < \pi$), 有

$$F \overset{令}{=} \frac{e^{-im\theta}}{12}\Delta_h e^{im\theta} = 1 - \frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta}{2} \geq \frac{2}{3} > 0,$$

$$G \overset{令}{=} -re^{-im\theta}L_h e^{im\theta} = 4r\sin^2\frac{\theta}{2} \geq 0.$$

现设 $A=(3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)F+2\alpha_1 G$, $B=-4(\alpha_1-\alpha_3)F+2\alpha_2 G$, $C=(\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3)F+2\alpha_3 G$, 因而有如下的(Ⅰ),(Ⅱ)情况.(Ⅰ) 当 $A\neq 0, C\neq 0$ 时, 格式(10)为三层格式. 按文[]中的理论, 格式(10)的传播矩阵为

$$G(m,\Delta t)=\begin{bmatrix} -\frac{B}{A} & -\frac{C}{A} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其特征方程为 $A\lambda^2+B\lambda+C=0$, 注意到 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. 因此, 当 $\alpha_1\geq\alpha_3\geq 0$ 时, 有 $3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\geq \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. 故 $A\geq F+2\alpha_1 G\geq F>0$, 且 $A-C=2F+2(\alpha_1-\alpha_3)G\geq 2F>0$. 当 $\alpha_1\geq\alpha_3\geq 0$ 且 $\alpha_1+\alpha_3\geq\alpha_2$ 时有 $A-B+C=8(\alpha_1-\alpha_3)F+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)G\geq 0$, 最后有 $A+B+C=2G\geq 0$. 又注意到 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, 故条件 $\alpha_1+\alpha_3\geq\alpha_2$ 等价于 $\alpha_2\leq\frac{1}{2}$. 综上所述, 当 $\alpha_1\geq\alpha_3\geq 0$, $\alpha_2\leq\frac{1}{2}$ 且 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ 时, 引理条件成立. 由引理结论知此时特征方程的两根按模小于等于1, 且由于 $A-C>0$ 不可能有等于1的根, 故差分格式(10)对任何 $r=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}>0$ 均稳定.(Ⅱ) 当 $A=0$(即 $\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_3$)且 $C\neq 0$ 时, 格式(10)为两层格式. 由(Ⅰ)易得格式(10)的传播因子为

$$G(\theta)=-\frac{C}{B},$$

此时 $C=-4\alpha_3 F+2\alpha_3 G$, $B=4\alpha_3 F=2\alpha_3 G$, 可得

$$|G(\theta)|=\left|-\frac{C}{B}\right|=\left|\frac{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-2r\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2r\sin^2\frac{\theta}{2}}\right|.$$

显然, 对任意的 θ 和 r 均成立 $|G(\theta)|\leq 1$, 所以格式(10)绝对稳定. 同理可证, 当 $A\neq 0$ 且 $C=0$ 时格式(10)也是绝对稳定的.

再由Lax稳定性与收敛性等价定理, 可得本文如下的结论.

定理　设 $u(x,t)$ 是二阶抛物型方程(1)的充分光滑的解析解, 则差分格式(10)逼近方程(1)的局部截断误差至少为 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^4)$.(Ⅰ)当参数 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha_1\geq\alpha_3\geq 0$ 且 $\alpha_2\leq\frac{1}{2}$ 时差分格式(10)绝对稳定且收敛. 特别地, 当 $\alpha_2=\frac{2}{3}-\frac{1}{120r^2}$ 时差分格式(10)逼近方程(1)的局部截断误差高达 $O((\Delta t)^3+(\Delta x)^6)$, 在 $r\leq 1/\sqrt{20}$ 时稳定且收敛.(Ⅱ)当参数 $\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_3$ 或 $\alpha_1=\alpha_2, \alpha_3=0$ 时差分格式(10)也绝对稳定且收敛. 特别地, 当 $r=1/\sqrt{20}$ 时差分格式(10)逼近方程(1)的局部截断误差高达 $O((\Delta t)^3+(\Delta x)^6)$, 它也是稳定且收敛的.

3　若干特例

(1) 当 $\alpha_1=\alpha_2, \alpha_3=0$ 或 $\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_3$ 时, 格式(10)便成为不含参数的两层恒稳隐式格式, 即文献[]中的格式6, 亦即文献[4]中的格式(2.6).

(2) 当 $\alpha_1=\alpha_2=1/2, \alpha_3=0$ 时, 格式(10)可成为两层六点的恒稳隐式格式, 即文献[]中的格式12.

(3) 当 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ 时便得一个三层九点恒稳隐式格式, 即文献[1]中的格式 13.

(4) 记 $\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha, \alpha_2 = \frac{1}{2} - 2\beta$, 由 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 得 $3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2\alpha + 1, \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 2\alpha - 1, \alpha_1 = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} + \beta$, 格式(10)便成为文献[2]中的格式(2), 此格式对非负有界参数偶(α, β)的任意选取均稳定. 特取 $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{240r^2} - \frac{1}{12}$ 时截断误差高达 $O((\Delta t)^3 + (\Delta x)^6)$, 这时还要求 $r \leq 1/\sqrt{20}$, 与本文结论相符.

(5) 当 $\alpha_1 = \alpha_3 = 1/4, \alpha_2 = 1/2$ 时格式(10)为恒稳三层九点隐式格式, 即文献[3]中的格式(7).

(6) 当 $\alpha_1 = \alpha_3 = 1/6, \alpha_2 = 1/3$ 时格式(10)便为文献[3]中的格式(10).

(7) 当 $\alpha_1 = \frac{1-2\eta}{24r}, \alpha_2 = (1-\eta) - \frac{1-2\eta}{12r}$ 及 $\alpha_3 = \eta + \frac{1-2\eta}{24r}$ 时格式(10)便成为三层七点高精度显式格式, 即文献[4]中的格式(2.8).

(8) 当 $\alpha_1 = \alpha_3, 2\alpha_1 \geq \alpha_2$ 时, 记 $\alpha_1 = b_1/2$, 则由 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 得 $\alpha_2 = 1 - b_1$. 显然, 有 $b_1 \geq 1/2$, 格式(10)成为恒稳的三层七点格式. 尤其当 $\alpha_1 = \alpha_3 = 1/2, \alpha_2 = 0$ 时, 可得新的恒稳的三层六点格式为

$$\Delta_h(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) = 12rL_h(u_m^{n+1} + u_m^{n-1}). \tag{11}$$

4　数值例子

仍以文[4]中的初边值问题为例, 即在(1)式中取 $f(x) = \sin x, g_1(t) = g_2(t) = 0, L = \pi$, 并记本文的格式(10), 当取 $\alpha_1 = \frac{3}{12} - \frac{1}{240r^2}, \alpha_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{120r^2}$ 且 $\alpha_3 = \frac{1}{12} - \frac{1}{240r^2}$ 时为格式(12). 现用本文格式(11), (12)和文[1]中的格式 12, 13 求数值解作比较. 为简便计, 用本例的精确解 $u(x, t) = e^{-t}\sin x$ 计算第一层的值, 结果如表 1, 2 所示.

表 1　$\Delta t = 0.006\ 81, \Delta x = \pi/18, r = 0.223\ 6 \approx 1/\sqrt{20}$ 和 $n = 100$ 层的关系表

项　目	$\pi/18$	$3\pi/18$	$5\pi/18$	$7\pi/18$	$9\pi/18$
文献[1]中的格式(12)	0.087 842 0	0.253 023 8	0.387 655 0	0.475 529 2	0.506 047 6
文献[1]中的格式(13)	0.087 836 0	0.253 021 8	0.387 651 9	0.475 525 5	0.506 043 6
本文格式(11)	0.087 835 0	0.253 021 8	0.387 651 9	0.475 525 4	0.506 043 6
本文格式(12)	0.087 842 0	0.253 023 8	0.387 655 0	0.475 529 2	0.506 047 6
真　值	0.087 842 0	0.253 023 8	0.387 654 9	0.475 529 2	0.506 047 6

表 2　$\Delta t = 0.030\ 46, \Delta x = \pi/18, r = 1.0$ 和 $n = 100$ 层的关系表

项　目	$\pi/18$	$3\pi/18$	$5\pi/18$
文献[1]中的格式(12)	0.008 253 5	0.023 765 0	0.036 410 0
文献[1]中的格式(13)	0.008 247 6	0.023 747 9	0.036 383 9
本文格式(11)	0.008 247 6	0.023 748 1	0.036 384 2
本文格式(12)	2 761 153.785 800 0	9 183 441.321 700 0	16 968 656.074 000 0
真　值	0.008 255 3	0.023 770 2	0.036 418 1

表 1 表明本文格式(12)($\alpha_2 = 0.5$)和文献[1]中的格式 12($\alpha_2 = 0.5$), 比本文格式(11)和文

献 [] 中的格式 13 精度高(一般多一位到两位有效数字). 表 2 表明本文格式(12)在 $\alpha_2 > 0.5$ 时不稳定.

以上结果表明, 本文格式(12)在 $r \leq \frac{1}{20}$ 时比本文格式(11)和文献 [] 中的格式(12), (13)精度高(一般多一位至两位有效数字). 同时, 它在 $\alpha_2 > \frac{1}{2}$ 时不稳定, 理论与实际相符.

参 考 文 献

1 Lancaster P 著. 初值问题的差分方法[M]. 第 2 版. 袁国兴等译. 广州: 中山大学出版社, 1992. 59～91, 187～189

2 陈传淡, 林 群. 一族绝对稳定的差分格式[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1983, 22(3): 275～279

3 周顺兴, 解抛物型偏微分方程的高精度差分格式[J]. 计算数学, 1982, 4(2), 204～213

4 金承日. 解抛物型方程的高精度显式格式[J]. 计算数学, 1991, 13(1): 38～44

5 曾文平. 解四阶抛物型方程的高精度恒稳的隐式格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 331～335

A Group of Steady Difference Schemes wth High Accuracy for Solving Parabolic Equation

Huang langyang Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A new group of three-layer implicit differemce schemes, which can be two-layer in special case, are constructed for solving second-order parabolic equation where $u_t = u_{xx}$. They contain non-negative parameter α_1, α_2 and α_3, with truncation error up to $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ at least. Under the conditions of $\alpha_1 \geq \alpha_3 \geq 0$, $\alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ and $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, these three-layer schemes are absolutely stable. Under the conditions of $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3$ or $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = 0$ as a special case, they become two-layer but remain absolutely stable. All these schemes can be solved by double sweeping method. By choosing proper parameter, highly accurate schemes in difference schemes with initial boundary value can be obtained for solving parabolic equation.

Keywords second-order parabolic equation, absolutely stable, high accuracy, implicit difference scheme