第21卷　第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.21　No.2
2000年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr.2000

文章编号　1000-5013(2000)02-0121-03

任意 $k+1$ 个相邻自然数 k 次方的 k 次差等于 k 阶乘

庄天山[①]　　陈祖礼[②]

(① 华侨大学国际经济系, ② 华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

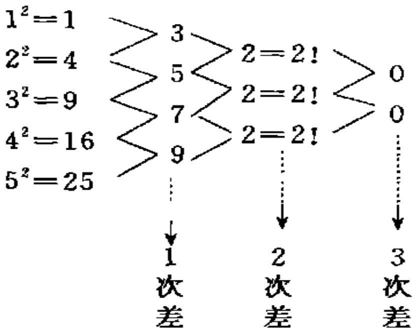
摘要　经研究发现一个数学规律,即 $k+1$ 个相邻的自然数的 k 次方,其 k 次差等于 $k!$. 当 $n\geq 1$ 时,相邻 $k+n+1$ 个自然数的 k 次方的 $k+n$ 次差则均为0. 这个规律体现了自然数自身的内在联系. 通过数学归纳法进行严格的理论证明,证实所给命题的正确性.

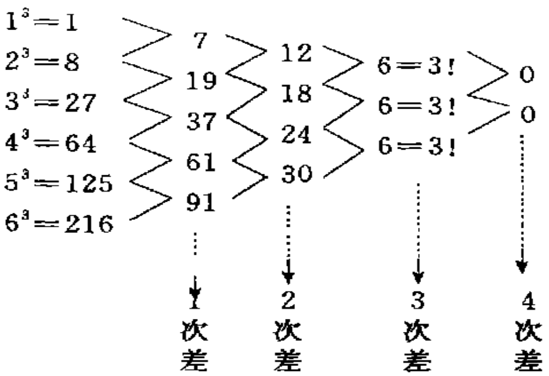
关键词　自然数,规律,数学归纳法

中图分类号　O 241.5　　文献标识码　A

1　问题的提出

在差分和内插[~3]形式等计算方法的启发下,发现如下的一个数学规律(记号为 $\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\rangle c=b-a$). 即





我们曾尝试至 $k=8$ 次方的情况. 即按上面的方法,列出 $\{1^4, 2^4, 3^4, \cdots, 7^4\}$, $\{1^5, 2^5, 3^5, \cdots, 8^5\}$, $\cdots$, $\{1^8, 2^8, 3^8, \cdots, 11^8\}$ 等作系列计算. 结果是4次方的4次差为4!,而5次差为0; 5次方的5次差为5!,而6次差为0; 等等. 依次类推,皆准确无误. 于是总结出如下的一个命题: $k+1$ 个相邻自然数的 k 次方、其 k 次差等于 $k!$; 而 $(k+2)$ 个相邻自然数的 k 次方的 $(k+1)$ 次差一定为0. 由命题的后段可以推出,当 $n\geq 1$ 时, $k+n+1$ 个相邻自然数的 k 次方的 $k+n$ 次差必都为

收稿日期　1999-10-08　　作者简介　庄天山(1934-),男,教授

0. 尽管所选的自然数,都只是自然数的开头几项,但无伤于一般性.事实上,我们也曾尝试过取任意1个自然数作起点的情况,结果证明与起点无关.因为这个发现还仅是从有限组数列作数值上的推步演算得出的.虽成规律,但从数学上说,还是一个有待作通项判断的命题.于是在这个基础上用数学归纳法加以证明,完成通项判断,使命题成立,成为普遍规律.

2 数学归纳法的证明

按数学归纳法的原则[4],第一步设 n 为任意自然数,令 $k=1$,验证 $\{n, n+1, n+2\}$ 这3个数的1次差及2次差为

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)^1-n^1=1! \\ (n+2)^1-(n+1)^1=1!\end{array}\right\rangle 0$$

1次差 2次差

命题成立.次令 $k=2$,验证 $\{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^3\}$ 这4个数的2次差及3次差.即

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)^2-n^2=2n+1 \\ (n+2)^2-(n+1)^2=2n+3 \\ (n+3)^2-(n+2)^2=2n+5\end{array}\right\rangle \left.\begin{array}{l}2=2! \\ 2=2!\end{array}\right\rangle 0$$

1次差 2次差 3次差

命题也成立.再按归纳法的第二步,设命题对任何小于、等于 k 的数都是成立的.即当 j 为自然数,且 $j\leq k$ 时 $\{n^j, (n+1)^j, (n+2)^j, \cdots, (n+j+1)^j\}$ 的 j 次差等于 $j!$,而 $j+1$ 次差则等于0,证明对 $j=k+1$ 命题也成立.也就是要证明如下的 $k+2$ 个数 $\{n^{k+1}, (n+1)^{k+1}, (n+2)^{k+1}, \cdots, (n+k)^{k+1}, (n+k+1)^{k+1}\}$ (*) 的 $k+1$ 次差等于 $(k+1)!$,而 $k+2$ 次差等于0(这点将在最后说明).

证明 先取它们的一次差为

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=C_{k+1}^{1}n^k+C_{k+1}^{2}n^{k-1}+C_{k+1}^{3}n^{k-2}+\cdots+C_{k+1}^{k}n+1,$$

$$(n+2)^{k+1}-(n+1)^{k+1}=C_{k+1}^{1}(n+1)^k+C_{k+1}^{2}(n+1)^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{k}(n+1)+1,$$

$$(n+k)^{k+1}-(n+k-1)^{k+1}=C_{k+1}^{1}(n+k-1)^k+C_{k+1}^{2}(n+k-1)^{k-1}+C_{k+1}^{3}(n+k-1)^{k-2}+\cdots+C_{k+1}^{k}(n+k-1)+1,$$

$$(n+k+1)^{k+1}-(n+k)^{k+1}=C_{k+1}^{1}(n+k)^k+C_{k+1}^{2}(n+k)^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{k}(n+k)+1.$$

在以上公式中,$C_{k+1}^{l}=\dfrac{(k+1)k\cdots[k-(l-2)]}{l!}$ 是组合系数,$l=1,2,3,\cdots,k$ 对上面这组数再做 k 次差.也就是说式(*)中 $k+2$ 个数的 $k+1$ 次差.不难看出,上面这组数的 k 次差就是由如

下的 k 组数, 分别取 k 次差, 再求和 . 即

$$\{C_{k+1}^{1}n^{k}, C_{k+1}^{1}(n+1)^{k}, C_{k+1}^{1}(n+2)^{k}, \cdots, C_{k+1}^{1}(n+k-1)^{k}, C_{k+1}^{1}(n+k)^{k}\},$$

$$\{C_{k+1}^{2}n^{k-1}, C_{k+1}^{2}(n+1)^{k-1}, C_{k+1}^{2}(n+2)^{k-1}, \cdots, C_{k+1}^{2}(n+k-1)^{k-1}, C_{k+1}^{2}(n+k)^{k-1}\},$$

$$\{C_{k+1}^{3}n^{k-2}, C_{k+1}^{3}(n+1)^{k-2}, C_{k+1}^{3}(n+2)^{k-2}, \cdots, C_{k+1}^{3}(n+k-1)^{k-2}, C_{k+1}^{3}(n+k)^{k-2}\},$$

$$\{C_{k+1}^{k}n, C_{k+1}^{k}(n+1), C_{k+1}^{k}(n+2), \cdots, C_{k+1}^{k}(n+k-1), C_{k+1}^{k}(n+k)\}.$$

这 k 组数的 k 次差, 第一组提出公因子 $C_{k+1}^{k}=k+1$, 它就是相邻 $k+1$ 个自然数的 k 次方的 k 次差 . 按归纳法计算, 它应等于 $(k+1)k! = (k+1)!$. 对第二组, 提出公因子 C_{k+1}^{2} 后, 它是由 $k+1$ 个相邻自然数的 $(k-1)$ 次方的 k 次差组成, 因为 $k-1$ 次差就等于 $(k-1)!$, 再做一次差, 就正好都为 0. 类似地, 可以证明, 从第三组起的 k 次差也都为 0.

由上面所证不难看出, 任意 $(n+k+3)$ 个相邻自然数 $\{n^{k+1}, (n+1)^{k+1}, \cdots, (n+K+1)^{k+1}, (n+k+2)^{k+1}\}$ 的 $k+1$ 次方的 $k+2$ 次差也都为 0. 至此, 命题成立 .

本规律系庄天山发现, 证明由陈祖礼完成 .

参　考　文　献

1　赵树原 . 经济应用数学基础[M] . 北京: 中国人民大学出版社, 1995. 391～404

2　李岳生 . 数值逼近[M] , 北京: 人民教育出版社, 1987. 40～52

3　武汉大学计算教研组编 . 计算方法[M] . 北京: 人民教育出版社, 1980. 106～120

4　北京大学数学力学系编 . 高等代数[M] . 北京: 人民教育出版社, 1978. 127～128

k Difference of *k* Power of Arbitrary *k*+ 1 Adjacent Natural Numbers Equal to *k* Factorial

Zhuang Tianshan①　　Chen Zuli②

(① Dept. of Intern. Econom., ② Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　The first author discovered a mathematical regular pattern as follows: k difference of k power of arbitrary $k+1$ adjacent natural numbers equal to $k!$; and $k+n$ difference of k power of $k+n+1$ natural numbers equal to zero, where $n\geq 1$. This regular pattern reflects the inner link of natural numbers themselves. In the light of the process of mathematical induction, the proposition is verified to be correct.

Keywords　natural number, regular pattern, mathematical induction