第21卷 第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.21 No.2
2000年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr.2000

文章编号 1000-5013(2000)02-0116-05

Burger´s 方程的 AGE 与 ADE 方法比较

曾 文 平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 以求解 Burger´s 方程的中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式和修正 Dennis 格式为基础, 构造若干新的 AGE 方法与 ADE 方法, 给出它们实验模型的数值比较结果.

关键词 Burger´s 方程, AGE 格式, ADE 格式
中图分类号 O 241.7　　文献标识码 A

本文考虑非线性 Burger´s 方程的初边值混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \le x \le 1, t > 0), & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad (0 < x < 1), & (2) \\ u(0,t) = g_1(t), u(1,t) = g_2(t) \qquad (t > 0). & (3) \end{cases}$$

该问题可作为 Navier-stokes 方程的简化形式. 因此, 求解方法的研究具有实用意义, 研究其计算方法也引起充分的重视. 在目前已有的很多算法中, 显式格式的稳定性限制较苛刻, 而隐式算法虽不受稳定性限制, 但要求解非线性代数方程组. 因此, 这些算法均不适合于在并行机和向量机上实现. 针对这一问题, 文[1～3]采用分组显式(GE)方法和交替分组显式(AGE)方法求解问题(1)～(3). 由于该方法是显式求解且无稳定性限制, 因此易于在并行机和向量机上实现而受到充分的重视. 但是, 许多分组显式格式[1,2]在相容性方面往往受到网格比的限制, 即要求当 $\tau, h \to 0$ 且 $\dfrac{\tau}{h} \to 0$ 时才相容, 其中 τ, h 为时间和空间步长. 针对上述存在的问题, 本文将利用文[4]的思想, 以非线性 Burger´s 方程的4种常见格式——中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式和修正 Dennis 格式为基础, 构造若干新的交替方向(ADE)方法及交替分组显式(AGE)方法. 最后, 给出了 AGE 方法和 ADE 方法的实验模型的数值比较结果.

1 交替方向显式(ADE)方法

对区间[0,1]取均匀网格点 $x_j = jh, j = 0, 1, \cdots, m, mh = 1; t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \cdots$. Burger´s 方程(1)的4种常见格式[5]为

1.1 中心差分格式

收稿日期 1999-08-17　　作者简介 曾文平(1940-), 男, 教授
基金项目 福建省自然科学基金资助项目

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{4}$$

1.2 显式逆风格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon\left(1+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}, \tag{5}$$

其中 $\left|R_j^n\right|=\left|u_j^n\right|h/\epsilon$ 为网格 Reynolds 数.

1.3 Samarskii 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|}+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right]\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{6}$$

1.4 修正 Dennis 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=$$
$$\epsilon\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|+\frac{1}{6}(R_j^n)^2}+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right]\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{7}$$

格式(4)～(7)可统一写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-P_j^n(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+Q_j^n(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n), \tag{8}$$

其中

$$P_j^n=\frac{u_j^n\tau}{2h}=r\cdot\frac{u_j^nh}{2},\qquad r=\tau/h^2; \tag{9}$$

$$Q_j^n=\begin{cases}\epsilon r & (\text{中心差分格式}),\\ \epsilon r\left(1+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right) & (\text{显式逆风格式}),\\ \epsilon r\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|}+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right) & (\text{Samarskii 格式}),\\ \epsilon r\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|+\frac{1}{6}(R_j^n)^2}+\frac{1}{2}\left|R_j^n\right|\right) & (\text{修正 Dennis 格式}).\end{cases} \tag{10}$$

由此给出方程(1)的相应线性化的半隐式差分格式为

$$u_j^{n+1}-Q_j^n(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1})=V_j^n-Q_j^n(u_j^n-u_{j-1}^n), \tag{11}$$
$$u_j^{n+1}+Q_j^n(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})=V_j^n+Q_j^n(u_{j+1}^n-u_j^n), \tag{12}$$
$$V_j^n=u_j^n-P_j^n(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n). \tag{13}$$

从上述公式可以给出如下的半显式算法. (1) RL 公式(从右往左计算)为

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{1+Q_j^n}\{Q_j^nu_{j+1}^{n+1}+(1-Q_j^n)u_j^n+(P_j^n+Q_j^n)u_{j-1}^n-P_j^nu_{j+1}^n\}. \tag{14}$$

(2) LR 公式(从左往右计算)为

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{1+Q_j^n}\{Q_j^nu_{j-1}^{n+1}+(1-Q_j^n)u_j^n+(P_j^n-Q_j^n)u_{j+1}^n+P_j^nu_{j-1}^n\}. \tag{15}$$

(3) ADE(交替方向显式格式)为

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{1+Q_j^n}\{Q_j^n u_{j+1}^{n+1}+(1-Q_j^n)u_j^n+(P_j^n+Q_j^n)u_{j-1}^n-P_j^n u_{j+1}^n\}, \tag{16}$$

$$u_j^{n+2}=\frac{1}{1+Q_j^{n+1}}\{Q_j^{n+1}u_{j-1}^{n+2}+(1-Q_j^{n+1})u_j^{n+1}+(P_j^{n+1}-Q_j^{n+1})u_{j+1}^{n+1}+P_j^{n+1}u_{j-1}^{n+1}\}. \tag{17}$$

2 交替分组显式(AGE)方法

先形成分组显式(GE)格式,将(x_j, t_{n+1})及(x_{j+1}, t_{n+1})分成一组. 在点(x_j, t_{n+1})用格式(11),在点(x_{j+1}, t_{n+1})用格式(12),于是有如下的2×2方程组. 即

$$\begin{bmatrix}1+Q_j^n & -Q_j^n\\ -Q_{j+1}^n & 1+Q_{j+1}^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^{n+1}\\ u_{j+1}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_j^n-Q_j^n(u_j^n-u_{j-1}^n)\\ V_{j+1}^n+Q_{j+1}^n(u_{j+2}^n-u_{j+1}^n)\end{bmatrix}. \tag{18}$$

易知

$$\begin{bmatrix}1+Q_j^n & -Q_j^n\\ -Q_{j+1}^n & 1+Q_{j+1}^n\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{A}\begin{bmatrix}1+Q_{j+1}^n & Q_j^n\\ Q_{j+1}^n & 1+Q_j^n\end{bmatrix},$$

其中

$$A=1+Q_j^n+Q_{j+1}^n. \tag{19}$$

所以,式(18)可以显式地表示为

$$\begin{bmatrix}u_j^{n+1}\\ u_{j+1}^{n+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{A}\begin{bmatrix}1+Q_{j+1}^n & Q_j^n\\ Q_{j+1}^n & 1+Q_j^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_j^n-Q_j^n(u_j^n-u_{j-1}^n)\\ V_{j+1}^n+Q_{j+1}^n(u_{j+2}^n-u_{j+1}^n)\end{bmatrix}. \tag{20}$$

对于不成组的内点,则单独进行计算. 右不成组单点用格式(11)计算为

$$u_{m-1}^{n+1}=\frac{1}{1+Q_{m-1}^n}\{Q_m^n u_m^{n+1}+V_{m-1}^n-Q_{m-1}^n(u_{m-1}^n-u_{m-2}^n)\}. \tag{21}$$

左不成组单点用格式(12)计算为

$$u_1^{n+1}=\frac{1}{1+Q_1^n}\{Q_1^n u_0^{n+1}+V_1^n+Q_1^n(u_2^n-u_1^n)\}, \tag{22}$$

其中P_j^n, Q_j^n, V_j^n及A,分别如式(9),(10)式,(13)和(19)所示.

利用上述计算公式,可以形成如下的GE算法.

(A) m为偶数. (1) GER(靠右边界的内点为不成组点)对左起的$m-2$个内点用格式(20),对最后一个内点则用格式(21). (2) GEL(靠左边界的内点为不成组点)对左起的第一个内点用格式(22),其余$m-2$个内点依次分为$\frac{1}{2}(m-2)$组,用格式(20). (3) (S)AGE(单交替分组显式格式)在第$n+1$时间层上用GER格式,在第$n+2$时间层上用GEL格式. (4) (D)AGE(双交替分组显式格式)依下列次序运用GER和GEL算法: GER→GEL→GEL→GER.

(B) m为奇数. 内点为$m-1$个(偶数),可以形成GE如下的算法. (1) GEC(完全分组显式格式)分内点为两个点一组,共分$\frac{1}{2}(m-1)$组,每组内点均采用格式(20). (2) GEU(靠近左右边介点的两个内点不成组)靠近右边介点的内点采用格式(21),靠近左边界点的内点则采用格式(22),其余内点则分为$\frac{1}{2}(m-3)$组,在每成组点上用格式(20).

由GEC和GEU可如前构造出(S)AGE和(D)AGE方法. 由于m为奇数和偶数情况类

似，下面仅以 m 为偶数的情况加以讨论．

3　数值例子

例如考虑 Burger´s 方程的初值问题[2]为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\epsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x\in R,\ t>0, \quad (23)\\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in R, \quad (24)\end{cases}$$

其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}1.0 & x\le 0,\\ 0 & x>0\end{cases}$$

的准确解为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-\zeta}{t}\right)\exp\left(\frac{-G}{2\epsilon}\right)d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-G}{2\epsilon}\right)d\zeta \quad (25)$$

在计算中必须取一个有限区间，取边界条件

$$u(-x_{\max},t)=1.0,\ u(x_{\max},t)=0,$$

实际可取 $-x_{\max}=-10$．

数值结果如表 1～3 所示．表中 C-AGE(C-ADE)，U-AGE(U-ADE)，S-AGE(S-ADE)及 M-AGE(M-ADE) 分别表示基于中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式及修正 Dennis 格式的相应的(D) AGE(ADE) 方法．

表 1　结果比较($\epsilon=0.001$，$\tau=0.001$，$h=0.01$，$t=0.052$)

x	准确解	Evans 格式	C-AGE	C-ADE	U-AGE	U-ADE	S-AGE	S-ADE	M-AGE	M-ADE
-1.00	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
-0.15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
-0.10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
-0.05	1.000 0	1.000 0	0.980 7	0.978 2	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
0.00	1.000 0	0.999 8	0.706 7	0.741 5	0.910 4	0.895 3	0.978 2	0.970 8	1.002 9	1.003 1
0.05	0.000 0	0.000 2	0.000 6	0.000 6	0.000 0	0.000 0	0.000 4	0.000 4	0.000 2	0.000 2
0.10	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
1.00	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00

表 2　结果比较($\epsilon=0.000\,1$，$\tau=0.001$，$h=0.01$，$t=0.052$)

x	准确解	Evans 格式	C-AGE	C-ADE	U-AGE	U-ADE	S-AGE	S-ADE	M-AGE	M-ADE
-0.25	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
-0.20	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
-0.15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
-0.10	1.000 0	1.000 0	1.000 2	1.000 5	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
-0.05	1.000 0	1.000 0	0.851 5	0.830 6	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
0.00	1.000 0	1.000 0	1.032 8	1.065 4	0.516 2	0.491 7	0.998 9	0.976 9	1.003 8	1.003 7
0.05	0.000 0	0.004 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.10	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.15	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

续表

x	准确解	Evans 格式	C-AGE	C-ADE	U-AGE	U-ADE	S-AGE	S-ADE	M-AGE	M-ADE
0.20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 3 结果比较($\epsilon=0.00001$, $\tau=0.001$, $h=0.01$, $t=0.052$)

x	准确解	Evans 格式	C-AGE	C-ADE	U-AGE	U-ADE	S-AGE	S-ADE	M-AGE	M-ADE
-0.15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
-0.10	1.0000	0.9994	1.0002	1.0007	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
-0.05	1.0000	1.0157	0.8208	0.7954	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.00	1.0000	1.5348	2.7387	2.6882	0.0937	0.0859	1.0005	0.9579	1.0007	1.0006
0.05	0.0000	1.5348	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

经数值计算, 其结果说明如下 3 点 . (1) 各类 AGE 方法与同类 ADE 方法的精度大体相当. (2) 基于 Samarskii 格式、修正 Dennis 格式的 S-AGE(S-ADE) 方法和 M-AGE(M-ADE) 方法, 均明显地优于 Evans 方法 . 在计算中没有出现明显的物理振荡 . 它们不仅对适中的 ϵ, 且对于小的 ϵ, 数值结果与准确解也基本吻合 . (3) 由式(2)可见, 分组显式方法及交替分组显式方法的构成依赖于原来差分格式的一些特殊性质, 此与文 [2] 的结论相一致 .

参 考 文 献

1 Evans D J, Abdullah A R B. The group explicit method for the solution of Burger´s equation[J]. Computing, 1984, 32: 239～253

2 王子丁, 陆金甫, 肖世江 . Burger´s 方程的一个分组显式格式[J]. 计算物理, 1993, 10(4): 479～487

3 汤华中, 戴嘉尊 . Burger´s 方程的一类组来式差分格式[J]. 南京理工大学学报, 1995, 19(1): 53～57

4 郑世荣 . Transputer 并行计算机体系方案选择[J]. 小型微型计算机系统, 1992, (2): 1～8

5 陆金甫 . 对流-扩散方程的一些单调性差分格式[J]. 计算物理, 1991, (2): 157～164

Comparing Alternating Group Explicit Method with Alternating Direction Explicit Method for Solving Burger´s Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For solving Burger´s equation, several new alternating group explicit (AGE) methods and alternating direction explicit (ADE) methods are constructed on the basis of contral difference scheme, explicit upwind scheme, Samarskii scheme and modified Dennis scheme. Their experimental model and results of numeric comparison are given.

Keywords Burger´s equation, AGE scheme, ADE scheme