第21卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.21 No.2
2000年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr.2000

文章编号 1000-5013(2000)02-0111-05

# 极值I型分布恒加应力试验的统计分析

王 锋 吴绍敏

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 对极值I型分布场合,排除形状参数与加速应力无关的限制,进行恒加应力寿命试验统计分析,给出正常应力水平下寿命分布的参数及变异系数估计.

关键词 极值I型,恒加应力,统计分析

中图分类号 O 213.2 文献标识码 A

## 1 问题的提出

问题1 加速寿命试验的可靠性统计分析,一般作如下假设[~4].

(Ⅰ) 产品在应力水平 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 的加速条件下,其寿命分布类型与正常应力水平 $S_0$ 条件下的寿命分布类型相同,即 $T_i \sim F(\frac{\mu_i - t}{\sigma_i})$ $(i=\overline{0,k})$.

(Ⅱ) $\sigma_0 = \sigma_1 = \cdots = \sigma_k$,即形状参数与应力变化无关.

(Ⅲ) 位置参数 $\mu$ 与所加应力 $S$ 有如下的关系,即 $\mu = a + b\varphi(S)$,其中 $\varphi(S)$ 是应力 $S$ 的某个已知函数.

假定(Ⅰ)是有道理的,因加速寿命试验时,选择的应力水平必须保持"失效机理不变",否则无法进行分析,"失效机理不变"首先反映在分布类型不变.假定(Ⅲ)是由试验总结出来的统计模型,是有根据的,可以接受.假定(Ⅱ)似乎根据不足.在应力水平 $S_i$ $(i=\overline{0,k})$ 上产品的寿命为 $T_i \sim F(\frac{\mu_i - t}{\sigma_i})$,因 $T_i \neq T_j$,当 $i \neq j$,就该有 $\mu_i \neq \mu_j$,$\sigma_i \neq \sigma_j$,故 $\sigma$ 与应力的变化不会无关.

问题2 几乎所有的书籍与文献都是应用图分析法、线性无偏估计法和最优线性无偏估计法进行分析.这3种方法计算麻烦且要查许多数值表,分析出的结论误差较大且难以推广应用,不利于对产品可靠性的评定.

本文将去掉不合理的假定(Ⅱ),应用最大似然估计法,在恒加应力试验下,对极值I型分布 $I(\mu, \sigma, t)$ 进行统计分析,方法简单且估计精度高.

极值I型可作为串、并联系统的失效分布,且在应力-强度模型的计算以及在航空、化工、机械等部门,都有广泛的应用.

---

收稿日期 1999-07-20 作者简介 王 锋(1962-),男,讲师

## 2 引理与假定

引理1 设$T\sim F(t)=\exp\{-\exp(-\frac{t-\mu}{\sigma})\}$,则$X=\exp(-\frac{T}{\sigma})$服从指数分布$F(x)=1-\exp(-\lambda x)$,其中$\lambda=\exp(\frac{-\mu}{\sigma})$.记$\theta=\frac{1}{\lambda}=\exp(\frac{\mu}{\sigma})$.

证明 $P(X\le t)=P(\exp(-T/\sigma)\le t)=P(T>-\sigma\ln t)=1-\exp\{-\exp(\frac{\sigma\ln t-\mu}{\sigma})\}=1-\exp\{-\exp(\ln t-\frac{\mu}{\sigma})\}=1-\exp\{-t\cdot\exp(-\frac{\mu}{\sigma})\}=1-\exp\{-\lambda t\}$,其中$\lambda=\exp(-\frac{\mu}{\sigma})$.

引理2 设$T\sim I(\mu,\sigma,t)$,则$T$的变异系数$\delta=\pi/\sqrt{6}(\theta+\nu)$为Euler常数,其中$\theta=\mu/\sigma$,$\nu=0.577\ 215\ 7\cdots$.证明略.

假定Ⅰ 在正常应力水平$S_0$和加速应力水平$S_1<S_2<\cdots<S_k$下,产品的寿命均服从$I(\mu_i,\sigma_i,t)\ i=\overline{0,k}$,其分布函数为$F_i(t)=\exp\{-\exp(-\frac{t-\mu_i}{\sigma_i})\}$, $i=\overline{0,k}$,其中$\sigma_i>0$是形状参数,$\mu_i$是位置参数.

因指数分布$X\sim E(\lambda)$,记$\theta=\frac{1}{\lambda}$满足阿伦尼斯方程,$\ln\theta=a+b\varphi(S)$,其中$\varphi(S)$是应力$S$的某一已知函数,由引理1可得.

假定Ⅱ 若$T\sim I(\mu,\sigma,t)$,则

$$\frac{\mu}{\sigma}=a+b\varphi(S).\tag{1}$$

特别当$\sigma=1$,$T\sim I(\mu,1,t)$,则

$$\mu=a_1+b_1\varphi(S).\tag{2}$$

式(1),(2)是两个统计模型.

## 3 参数估计

### 3.1 在各加速应力水平$S_i$上参数$\mu_i$,$\sigma_i$的最大似然估计

定理 设在应力水平$S_i$上,产品寿命$T_i$服从$F_i(t)=1-\exp\{-\exp(-\frac{t-\mu_i}{\sigma_i})\}$分布,则$\mu_i$,$\sigma_i$的最大似然估计由方程组:

$$\mu_i=-\sigma_i\ln\{\frac{1}{r_i}[\sum_{j=1}^{r_i}\exp(-t_{ij}/\sigma_i)+(n_i-r_i)\exp(-T_i^*/\sigma_i)]\}\tag{3}$$

以及

$$\sigma_i=\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}-\frac{\sum_{j=1}^{r_i}\exp(-t_{ij}/\sigma_i)+(n_i-r_i)T_i^*\exp(-T_i^*/\sigma_i)}{\sum_{j=1}^{r_i}\exp(-t_{ij}/\sigma_i)+(n_i-r_i)\exp(-T_i^*/\sigma_i)}\tag{4}$$

确定.其中$n_i$为$S_i$上试验样品数,$r_i$为$S_i$上的失效个数,$(n_i-r_i)$为$S_i$上的未失效个数,$t_{ij}(j=\overline{1,r_i})$为应力水平$S_i$上的失效时间,$T_i^*$为$S_i$上的试验截止时间.当定时截尾时,$T_i^*$为截尾试验时间;当定数截尾试验时,$T_i^*=t_{ir_i}(i=\overline{1,k})$.

证明 用$S_i$上的失效数据$t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i}(i=\overline{1,k})$.故极大似然函数为

$$L(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i}\mid\mu_i,\sigma_i)=C\prod_{j=1}^{r_i}\frac{1}{\sigma_i}\exp\left(-\frac{t_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)\exp\left\{-\exp\left(\frac{t_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)\right\}\cdot$$
$$\exp\left\{-(n_i-r_i)\exp\left[-\left(\frac{T_i^*-\mu_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\},$$
$$\ln L=\ln C+\sum_{j=1}^{r_i}\ln\left\{\frac{1}{\sigma_i}e^{-\left(\frac{t_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)}e^{-e^{-\left(\frac{t_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)}}\right\}+(n_i-r_i)\ln e^{-e^{-\left(\frac{T_i^*-\mu_i}{\sigma_i}\right)}}=$$
$$\ln C+\sum_{j=1}^{r_i}\left\{-\ln\sigma_i-\left(\frac{t_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)-e^{-\left(\frac{t_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)}\right\}-(n_i-r_i)e^{-\left(\frac{T_i^*-\mu_i}{\sigma_i}\right)}=$$
$$\ln C-r_i\ln\sigma_i-\frac{1}{\sigma_i}\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}+\frac{r_i\mu_i}{\sigma_i}-e^{\mu_i/\sigma_i}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}e^{-t_{ij}/\sigma_i}+(n_i-r_i)e^{-T_i^*/\sigma_i}\right\}.$$

由 $\frac{\partial\ln L}{\partial\mu_i}=0$, 可得

$$\frac{r_i}{\sigma_i}-\frac{1}{\sigma_i}e^{\frac{\mu_i}{\sigma_i}}\left[\sum_{j=1}^{r_i}e^{-\frac{t_{ij}}{\sigma_i}}+(n_i-r_i)e^{-\frac{T_i^*}{\sigma_i}}\right]=0,$$
$$e^{\mu_i/\sigma_i}=r_i/\left[\sum_{j=1}^{r_i}e^{-\frac{t_{ij}}{\sigma_i}}+(n_i-r_i)e^{-\frac{T_i^*}{\sigma_i}}\right],\tag{5}$$

或

$$\mu_i=-\sigma_i\ln\left[\frac{1}{r_i}\left(\sum_{j=1}^{r_i}e^{-\frac{t_{ij}}{\sigma_i}}+(n_i-r_i)e^{-\frac{T_i^*}{\sigma_i}}\right)\right].\tag{6}$$

由 $\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma_i}=0$, 可得

$$-\frac{r_i\mu_i}{\sigma_i^2}-\frac{r_i}{\sigma_i}+\frac{1}{\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}+\frac{\mu_i}{\sigma_i^2}e^{\mu_i/\sigma_i}\left[\sum_{j=1}^{r_i}e^{-\frac{t_{ij}}{\sigma_i}}+(n_i-r_i)e^{-T_i^*/\sigma_i}\right]-$$
$$e^{\mu_i/\sigma_i}\frac{1}{\sigma_i^2}\left[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}e^{-t_{ij}/\sigma_i}+T_i^*(n_i-r_i)e^{-T_i^*/\sigma_i}\right]=0.\tag{7}$$

把式(5)代入式(7), 整理得

$$\sigma_i=\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}-\frac{\left[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}e^{-t_{ij}/\sigma_i}+(n_i-r_i)T_i^*e^{-T_i^*/\sigma_i}\right]}{\sum_{j=1}^{r_i}e^{-t_{ij}/\sigma_i}+(n_i-r_i)e^{-T_i^*/\sigma_i}}.\tag{8}$$

由式(6)和(8)知定理成立.

应用时, 只要对式(4)进行迭代. 令 $\hat{\sigma}_i=1$ 代入式(4)右边求得 $\hat{\sigma}_{i1}$, 再将 $\hat{\sigma}_{i1}$ 代入式(4)右边求得 $\hat{\sigma}_{i2}$, 如此迭代 $k$ 次使得 $|\hat{\sigma}_{ik}-\hat{\sigma}_{ik+1}|<0.001$ 即停止. 将 $\hat{\sigma}_{ik}$ 作为 $\hat{\sigma}$ 的估计值, 再将 $\hat{\sigma}_i$ 代入式(3)求得 $\hat{\mu}_i$.

**3.2　$\mu_0$ 的估计**

利用数据组 $(\hat{\mu}_i,\varphi(S_i))$, $i=\overline{1,k}$, 由式(2)按最小二乘法, 可求得

$$\hat{a}_1=\bar{\mu}-\hat{b}_1\bar{\varphi},\ \hat{b}_1=\left[\sum_{i=1}^{k}\hat{\mu}_i\varphi(S_i)-k\bar{\mu}\bar{\varphi}\right]/\left[\sum_{i=1}^{k}\varphi^2(S_i)-k\bar{\varphi}^2\right],$$

以及

$$\bar{\mu}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{\mu}_i,\quad\bar{\varphi}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varphi(S_i).\tag{9}$$

从而, 得到方程式为

$$\hat{\mu}=\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(S).\tag{10}$$

因此, 可求得 $\mu_0$ 的估计值 $\hat{\mu}_0=\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(S_0)$.

**3.3 $\sigma_0$ 的估计**

记 $\hat{\theta}_i=\frac{\hat{\mu}_i}{\sigma_i}$. 利用数据组$(\hat{\theta},\varphi(S_i))$, $i=\overline{1,k}$, 由式(1)按最小二乘法可求得

$$\hat{a}=\bar{\theta}-\hat{b}\bar{\varphi},\quad \hat{b}=[\sum_{i=1}^{k}\hat{\theta}\varphi(S_i)-k\bar{\theta}\bar{\varphi}]/[\sum_{i=1}^{k}\varphi^2(S_i)-k\bar{\varphi}^2], \tag{11}$$

其中 $\bar{\theta}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{\theta}$, $\bar{\varphi}=\sum_{i=1}^{k}\varphi(S_i)$. 得方程 $\hat{\theta}=\hat{a}+\hat{b}\varphi(S)$, 于是得 $\theta_0$ 的估计值 $\hat{\theta}_0=\hat{a}+\hat{b}\varphi(S_0)$, 从而得到 $\sigma_0$ 的估计值 $\hat{\sigma}_0=\frac{\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(S_0)}{a+b\varphi(S_0)}$. 由引理2可得变异系数 $\delta$ 的估计值, 即 $\hat{\delta}=\pi/\sqrt{6}(\hat{\theta}_0+\nu)$.

# 4 实例计算

假定某种电子元件的寿命服从极值I型分布, 现抽取一批样品进行温度的恒加应力寿命试验, 其结果如表1所示.

表1 恒加应力试验数据

| 应力水平/K | 样品数 | 失效数 | 失效时间/h | 截止时间/h |
|---|---|---|---|---|
| $S_1=360$ | $n_1=20$ | $r_1=4$ | 4.07, 4.37, 6.00, 6.20 | $T_1^*=6.5$ |
| $S_2=400$ | $n_2=16$ | $r_2=4$ | 2.80, 3.20, 3.85, 5.23 | $T_2^*=5.3$ |
| $S_3=440$ | $n_3=12$ | $r_3=4$ | 2.20, 2.40, 3.47, 4.57 | $T_3^*=4.6$ |
| $S_4=480$ | $n_4=8$ | $r_4=4$ | 1.20, 2.09, 3.40, 3.95 | $T_3^*=4.6$ |

试求在正常温度 $S_0=320$ K 下, 产品寿命分布函数及可靠性特征值估计.

**4.1 $\sigma_i$ 和 $\mu$ 的估计**

将各加速应力水平的数据代入式(3), (4)进行迭代. 取精度为0.000 1, 求得 $\hat{\sigma}_1=0.5933$, $\hat{\mu}_1=4.5006$; $\hat{\sigma}_2=0.5556$, $\hat{\mu}_2=3.2487$; $\hat{\sigma}_3=0.6145$, $\hat{\mu}_3=2.6165$; $\hat{\sigma}_4=0.8454$, $\hat{\mu}_4=1.9707$.

**4.2 $\mu_0$ 的估计**

取 $\varphi(S)=1/Sk_0$, $k_0=0.8617\times10^{-4}/k$(波兹曼常数), 可得

$\varphi_i$: 32.236 0, 29.012 4, 26.374 9, 24.177 0;

$\mu_i$: 4.500 6, 3.248 7, 2.616 5, 1.970 7;

$\hat{\theta}_i=\frac{\hat{\mu}_i}{\sigma_i}$: 7.585 7, 5.847 2, 4.257 9, 2.331 1.

由 $\gamma_{\varphi\mu}=0.9947$, 说明方程 $\hat{\mu}=-5.5497+0.3089\varphi(S)$ 可靠. 将 $\varphi(S_0)=36.2655$ 代入该方程, 求得 $\hat{\mu}_0=5.6527$.

**4.3 $\sigma_0$ 和 $\delta_0$ 的估计**

由假定II的 $\theta=a+b\varphi(S)$, 类似可得 $\hat{\theta}=-12.9135+0.6411\varphi(S)$. 因 $\gamma_{\varphi\theta}=0.9936$, 说明方程可靠, 将 $\varphi(S_0)$ 代入该方程求得 $\theta_0$ 的估计值, $\hat{\theta}_0=10.3366$, 进而可以求得 $\sigma_0$ 的估计值, 即 $\hat{\sigma}_0=0.5469$.

变异系数 $\hat{\delta}_0$ 的估计为 $\hat{\delta}_0=\pi/\sqrt{6}(\hat{\theta}_0+\nu)=0.11752$. 因此, 正常应力下产品寿命的分布函数为

$$F_0(t)=\exp[\exp(\frac{t-5.6527}{0.5469})]$$

由此可求得所有可靠性特征值.

## 5　结束语

(1) 由实例计算知, 形状参数 $\sigma$ 并非与应力无关.

(2) 若认为形状参数 $\sigma$ 与应力无关, 则加上假定 $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_k$. 此时, 假定(Ⅱ)中的 $\frac{\mu}{\sigma} = a + b\varphi(S)$ 与 $\mu = a_1 + b_1\varphi(S)$ 两个模型实质上一样, 故可去掉(1), 恰好与许多文献的假定一致. 此时可认为 $\sigma_i(i = \overline{1, k})$ 的不同是由随机误差引起的, 因此 $\sigma_0$ 的估计值可用 $\bar{\sigma} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\hat{\sigma}_i = 0.652\,2$, 无需应用图分析法或最佳线性无偏估计法. 应用最大似然估计法, 既简单又精度高.

(3) 若无法判断 $\sigma_i(i = \overline{1, k})$ 的差异是随机误差, 那么形状参数 $\sigma$ 与应力无关的假定, 不是错误就是多余, 可采用本文的方法.

(4) 对 $\sigma_0$ 的估计方法不同, 会影响对变异系数的估计. 用 $\bar{\sigma}_0 = 0.652\,2$ 算得 $\delta_0 = 0.138\,7$, 用 $\hat{\sigma}_0 = 0.546\,9$ 又算得 $\hat{\delta}_0 = 0.117\,5$, 当然也会影响其它可靠性特征值.

## 参　考　文　献

1　戴树森, 黄鹤良, 王玲玲等. 可靠性试验及其统计分析[M]. 北京: 国际工业出版社, 1983. 449～578

2　茆诗松. 指数分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析[J]. 应用数学学报, 1985, (3): 311～316

3　吴绍敏. 指数分布场合步进应力加速寿命试验的贝叶斯分析[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(1): 6～9

4　程细玉. 极值 I 型变异系数估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1998, 19(2): 115～117

# Statistical Analysis of Constant Stress Accelerated Life Testing for the Occasion of Extreme Value I Distribution

Wang Feng　　Wu Shaomin

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract**　A statistical analysis is made on the constant stress accelerated life testing. It is made for the occasion of extreme value I distribution where the restriction that shape parameter remains unchanged at different stress levels. The estimates of parameter and variation coefficient of life distribution are given under normal stress level.

**Keywords**　extreme value I, constant stress accelerated, statistical analysis