

文章编号 1000-5013(2000)01-0101-06

利用矩阵广义逆的极点配置问题新解法

龚 德 恩

(华侨大学工商管理系, 泉州 362011)

摘要 给出多输入定常线性系统极点配置问题的一个新解法. 该方法利用矩阵广义逆理论, 证明极点配置定理的充分性条件, 并得到反馈增益矩阵的一个含有任意参数的一般表达式. 通过对任意参数的适当选择, 不但能使闭环系统的极点任意配置, 还可满足闭环系统的其他性能要求. 两个典型的数值例子说明新方法的有效性和优越性.

关键词 多输入系统, 极点配置, 矩阵广义逆

中图分类号 TP 271. 61

文献标识码 A

给定多输入定常线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in R^n, \mathbf{u}(t) \in R^m$ 分别为状态和输入向量; \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 $n \times n, n \times m$ 常阵, 且 $\text{rank } \mathbf{B} = m, 2 \leq m \leq n$. 极点配置问题指的是求状态反馈控制律 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$, 使闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \mathbf{A}_c \triangleq \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$$

具有事先任意指定的极点集 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 上述中 \mathbf{K} 为 $m \times n$ 的待定常阵, 称为状态反馈增益矩阵; $\mathbf{v}(t)$ 为 m 维新的输入向量. 系统(1)能任意配置极点的充分必要条件是完全能控的^[1~4]. 这是线性系统理论的一个基本定理, 有多种证明方法. 本文给出该定理充分性条件的一个新证明, 并利用广义逆矩阵给出反馈增益矩阵的一般表达式. 该式含有任意参数, 使反馈控制系统除达到极点配置的要求外, 还能适应控制系统的其他性能要求.

1 分析

设矩阵 \mathbf{B} 的第 i 列为 \mathbf{b}_i , 控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 的第 i 个分量为 $u_i(t), i = 1, 2, \dots, m$. 记 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m], \bar{\mathbf{u}}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$. 将系统(1)改写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t). \quad (2)$$

设系统(1)完全能控. 首先, 考虑状态反馈

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t). \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 得单输入系统

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + b_1 u(t) + \bar{B}\bar{v}(t), \quad \bar{A} \triangleq A + BK, \quad (4)$$

其中 K 为 $(m-1) \times n$ 待定矩阵, $\bar{v}(t) = [v_2(t), \dots, v_m(t)]^T$. 其次, 选取矩阵 K , 使单输入系统(4)完全能控, 即有

$$\text{rank } Q = n, \quad Q \triangleq [b_1, \bar{A}b_1, \dots, \bar{A}^{n-1}b_1]. \quad (5)$$

最后, 按单输入系统极点配置方法, 求系统(4)的反馈控制律 $u_1(t) = k_1 x(t) + v_1(t)$, 使闭环系统 $\dot{x}(t) = A_c x(t) + B v(t)$, $A_c \triangleq \bar{A} + b_1 k_1$ 具有事先指定的极点集 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 其中 k_1 为 n 维行向量. 令

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \bar{K} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

则有 $A_c = \bar{A} + b_1 k_1 = A + \bar{B}\bar{K} + b_1 k_1 = A + BK$. 由此可知, 式(6)确定的 K 为所求的反馈增益矩阵.

2 基本定理

上述分析表明, 关键问题在于系统(1)完全能控时, 是否存在矩阵 K , 使单输入系统(4)完全能控. 在证明下面的基本定理之前, 先介绍一个引理.

引理^[6] 设 M, N 和 D 分别为 $n \times m, p \times q$ 和 $n \times q$ 的已知矩阵, X 为 $m \times p$ 的未知矩阵, 则矩阵方程

$$MXN = D \quad (7)$$

有解的充分必要条件是 $MM^-DN^-N = D$, 其中 M^-, N^- 分别表示 M, N 的广义逆. 方程(7)有解时, 其一般解为

$$X = M^-DN^- + (Z - M^-MZNN^-), \quad (8)$$

其中 Z 为 $m \times p$ 的任意矩阵.

定理 若系统(1)完全能控, 则存在 $(m-1) \times n$ 的矩阵 K , 使单输入系统(4)完全能控, 即式(5)成立. K 的表达式可由下面的式(18), (19)确定. 于是, 系统(1)能任意配置极点.

证明 因系统(1)完全能控, 故能控性矩阵 $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = [b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m]$ 中一定存在 n 个线性无关的列. 设取出的 n 个线性无关列向量为

$$\begin{aligned} p_1 &= b_1, & p_2 &= Ab_1, & \dots, & p_{\mu_1} &= A^{\mu_1-1}b_1, \\ p_{\mu_1+1} &= b_2, & p_{\mu_1+2} &= Ab_2, & \dots, & p_{\eta_2} &= A^{\mu_2-1}b_2, \end{aligned}$$

⋮

$$p_{\eta_{m-1}+1} = b_m, \quad p_{\eta_{m-1}+2} = Ab_m, \quad \dots, \quad p_{\eta_m} = p_n = A^{\mu_m-1}b_m,$$

其中 $\eta_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$ ($i = 1, \dots, m$), 且 $\eta_m = \mu_1 + \dots + \mu_m = n$. 若某个 b_i 不出现, 则规定 $\mu_i = 0$. 令 $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$, 则 P 为非奇异方阵. 令 $q_1 = b_1, q_i = A^{i-1}b_1, i = 2, \dots, n$, 其中 q_2, \dots, q_n 为待定的 n 维列向量, 则可得 $BKq_i = q_{i+1} - Aq_i, i = 1, \dots, n-1$. 由此得到矩阵方程

$$\bar{B}\bar{K}[q^1, q^2, \dots, q^{n-1}] = [q^2 - Aq^1, q^3 - Aq^2, \dots, q^n - Aq^{n-1}]. \quad (9)$$

于式(9)的右边令

$$\left. \begin{aligned} q_{i+1} &= Aq_i, & i &= 1, \dots, \mu_1 - 1, \\ q_{\mu_1+i+1} &= Aq_{\mu_1+i} + b_2, & i &= 0, \dots, \mu_2 - 1, \\ q_{\eta_2+i+1} &= Aq_{\eta_2+i} + b_3, & i &= 0, \dots, \mu_3 - 1, \\ &\vdots \\ q_{\eta_{m-1}+i+1} &= Aq_{\eta_{m-1}+i} + b_m, & i &= 0, \dots, \mu_m - 1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则有

$$q_i = A^{i-1} q_1 = A^{i-1} b_1, i = 1, 2, \dots, \mu_1, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} q_{\mu_1+i} &= A^i q_{\mu_1} + A^{i-1} b_2 + \dots + A b_2 + b_2 = \\ &= A^{\mu_1-1+i} b_1 + A^{i-1} b_2 + \dots + A b_2 + b_2 = \\ &= A^{i-1} b_2 + \{A^{i-1} b_2\}, \quad i = 1, \dots, \mu_2, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\{A^{i-1} b_2\}$ 表示 P 中列向量的线性组合, 以下符号 $\{\dots\}$ 同此. 类似地, 可得

$$q_{\mu_2+i} = A^{i-1} b_3 + \{A^{i-1} b_3\}, \quad i = 1, \dots, \mu_3, \quad (13)$$

\vdots

$$q_{\mu_{m-1}+i} = A^{i-1} b_m + \{A^{i-1} b_m\}, \quad i = 1, \dots, \mu_m. \quad (14)$$

于是, 有

$$\begin{aligned} Q &= [q_1, q_2, \dots, q_n] = [b_1, Ab_1, \dots, A^{\mu_1-1} b_1, b_2 + \{b_2\}, Ab_2 + \{Ab_2\}, \dots, \\ &= A^{\mu_2-1} b_2 + \{A^{\mu_2-1} b_2\}, \dots, b_m + \{b_m\}, Ab_m + \{Ab_m\}, \dots, A^{\mu_m-1} b_m + \{A^{\mu_m-1} b_m\}]. \end{aligned}$$

由于 $\{b_2\}, \{Ab_2\}, \dots, \{A^{\mu_m-1} b_m\}$ 等均为矩阵 P 中列向量的线性组合, 故有

$$\text{rank } Q = \text{rank } P = n.$$

这表明, 按式(11)~(14)确定的 q_1, q_2, \dots, q_n 线性无关, 从而依定义 $b_1, \bar{A}b_1, \dots, \bar{A}^{n-1}b_1$ 线性无关. 将式(10)代入方程(9), 得

$$BKN = D, \quad (15)$$

$$\text{其中 } N = [q_1, q_2, \dots, q_{n-1}], \quad D = [\underbrace{O, \dots, O}_{\text{共 } \mu_1 - 1 \text{ 列}}, \underbrace{b_2, \dots, b_2}_{\text{共 } \mu_2 \text{ 列}}, \dots, \underbrace{b_m, \dots, b_m}_{\text{共 } \mu_m \text{ 列}}].$$

式(15)是关于矩阵 K 的矩阵方程. 根据引理, 其有解的充分必要条件是

$$B(\bar{B})^- DN^- N = D. \quad (16)$$

由于 $\text{rank } B = m, \text{rank } Q = n$, 故 \bar{B}, N 均为列满秩的, 从而有广义逆 $(\bar{B})^- = (\bar{B}^T \bar{B})^{-1} \bar{B}^T, N^- = (N^T N)^{-1} N^T$, 因 $NN^- N = (N^- N)^{-1} N^T N = I_{n-1}$, 故式(17)化为

$$B(\bar{B}^T \bar{B})^{-1} \bar{B}^T D = D. \quad (17)$$

注意到 $\bar{B} = [\bar{B}(\bar{B}^T \bar{B})^{-1} \bar{B}^T] \bar{B}$, 即有 $b = [\bar{B}(\bar{B}^T \bar{B})^{-1} \bar{B}^T] b_i, i = 2, \dots, m$. 由此可知式(11)成立. 因此, 矩阵方程(15)有解. 根据引理, 其一般解为

$$K = (\bar{B})^- DN^- + [Z - (\bar{B})^- BZNN^-], \quad (18)$$

其中 Z 为任意的 $(m-1) \times n$ 矩阵. 注意到 $(\bar{B})^- \bar{B} = (\bar{B}^T \bar{B})^{-1} \bar{B}^T \bar{B} = I_{m-1}$. 故有

$$(\bar{B}^T \bar{B})^{-1} \bar{B}^T b_{i+1} = e_i, i = 1, \dots, m-1,$$

其中 e_i 为 $m-1$ 阶单位阵 I_{m-1} 的第 i 列, $i = 1, \dots, m-1$. 于是, 式(18)简化为

$$K = EN^- + Z(I_n - NN^-), \quad (19)$$

其中 $N^- = (N^T N)^{-1} N^T, E \triangleq [\underbrace{O, \dots, O}_{\text{共 } \mu_1 - 1 \text{ 列}}, \underbrace{e^1, \dots, e^1}_{\text{共 } \mu_2 \text{ 列}}, \dots, \underbrace{e^{m-1}, \dots, e^{m-1}}_{\text{共 } \mu_m \text{ 列}}]$. 至此, 得到反馈

矩阵 K 的表达式(18)或式(19), 式中含有任意参数矩阵 Z . 定理得证.

推论 若有

$$\text{rank}[b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1] = n, \quad (20)$$

则反馈矩阵 K 为

$$K = Z(I_n - NN^T), \quad (21)$$

其中 Z 为任意的 $(m-1) \times n$ 矩阵, 而 $N = [b_1, Ab_1, \dots, A^{n-2}b_1]$.

证明 令 $q_i = p_i = A^{i-1}b_1, i = 1, \dots, n$, 则矩阵方程 (15) 化为 $BKN = 0$. 即有 $D = 0$, 故由式 (18) 可得到式 (21). 注意若式 (20) 不成立, 但对某个 $i \neq 1$ 有 $\text{rank}[b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1] = n$, 则只需将输入分量 $u_1(t)$ 与 $u_i(t)$ 的位置对换. 即将系统 (1) 改写为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t), \quad (22)$$

其中

$$\tilde{B} = [b_i, b_2, \dots, b_{i-1}, b_1, b_{i+1}, \dots, b_m],$$

$$\tilde{u}(t) = [u_i(t), u_2(t), \dots, u_{i-1}(t), u_1(t), u_{i+1}(t), \dots, u_m(t)]^T,$$

则对系统 (22) 可按推论方法进行.

推论的优点是由 $q_i = A^{i-1}b_1, (i = 1, \dots, n)$, 可直接得到 q_1, q_2, \dots, q_n , 从而减少计算量.

3 算法

根据前面的分析和定理证明过程, 反馈增益矩阵 K 有如下几种算法. (1) 构造矩阵 $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$. (2) 按式 (10) 计算向量 q^2, \dots, q^n , 并得到矩阵 $Q = [q_1, q^2, \dots, q^n] = [b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1]$, $N = [q_1, q^2, \dots, q^{n-1}]$. (3) 按公式 (19) 计算矩阵 E, K . (4) 计算 Q^{-1} 和 $\alpha = [0, \dots, 0, 1]Q^{-1}$. (5) 对给定的极点集 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 计算特征多项式 $P(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{A}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$. (6) 计算 $\bar{A} = A + BK$ 和 $k_1 = -\alpha P(\bar{A})$, 则所要求的反馈增益矩阵为 $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ K \end{bmatrix}$, 其中计算单输入系统反馈增益矩阵 k_1 的步骤 (4) ~ (6) 引自文献 [2].

4 算例

例1 已知系统^[6]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

求反馈增益矩阵 K , 使闭环系统极点为 $\{-2, -2, -2\}$.

解1 该系统的能控性矩阵为

$$[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 10 & 30 & 10 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然, 前3列线性无关, 故该系统完全能控. 因 b_1, Ab_1, A^2b_1 也线性无关, 故按推论方法, 取

$$P = [b_1, Ab_1, A^2b_1] = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 30 \\ 5 & 10 & 0 \end{bmatrix} = Q,$$

则由式 (30) 可求得 $K = (0.5z, -0.5z, 0)$, 其中记 $Z = (z_1, z_2, z_3)$, 而 $z = z_1 - z_2$, 为任意实参数.

按单输入反馈增益矩阵算法, 求得 $k_1 = [d_1(z), d_2(z), d_3(z)]$, 其中 $d_1(z) = -0.78125(z^3 - 2.8z^2 + 2.72z - 1.216)$, $d_2(z) = 0.78125(z^3 - 3.6z^2 + 4.96z - 2.624)$, $d_3(z) = 0.5z - 1.6$. 于是, 使闭环系统极点为 $\{-2, -2, -2\}$ 的反馈增益矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \bar{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(z) & d_2(z) & d_3(z) \\ 0.5z & -0.5z & 0 \end{bmatrix}.$$

解2 因为能控性矩阵前3列线性无关, 故可取

$$P = [b_1, Ab_1, b_2],$$

则可由式(10)求得 $(\mu_1 = 2, \mu_2 = 1)$, $Q = [q_1, q_2, q_3] = [b_1, Ab_1, A^2b_1 + b_2]$. 于是 $K = [0.05 + 0.5z, 0.05 - 0.5z, 0]$, 其中 $z = z_1 - z_2$ 仍为任意参数. 然后, 与解1类似地, 可求得 $k_1 = [d_1(z), d_2(z), d_3(z)]$, 其中 $d_1(z) = -0.625(z^3 - 2.9z^2 + 2.87z - 1.267)$, $d_2(z) = 0.625(z^3 - 3.9z^2 + 5.87z - 3.397)$, $d_3(z) = 0.5z - 1.65$. 于是, 使闭环系统极点为 $\{-2, -2, -2\}$ 的反馈增益矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \bar{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(z) & d_2(z) & d_3(z) \\ 0.05 + 0.5z & 0.05 - 0.5z & 0 \end{bmatrix}.$$

例2 已知系统⁶⁾

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

求反馈增益矩阵 K , 使闭环系统极点为 $\{-1, -2, -3, -4, -5\}$.

解 该系统能控性矩阵中, 仅有 $b_1, b_2, b_3, Ab_3, A^2b_3$ 5个非零列, 且这5个列是线性无关的, 故该系统完全能控. 令 $P = [b_1, b_2, b_3, Ab_3, A^2b_3]$, 此时有 $\mu_1 = \mu_2 = 1, \mu_3 = 3$. 于是, 按式(10), 可求得 $q_1 = b_1, q_2 = b_2, q_3 = b_3, q_4 = Ab_3 + b_3, q_5 = A^2b_3 + Ab_3 + b_3$. 从而有

$$Q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5], \quad N = [q_1, q_2, q_3, q_4],$$

$$N^- = (N^T N)^{-1} N^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = [e_1, e_2, e_2, e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 e_1, e_2 为二阶单位矩阵的1, 2列. 令 $Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \end{bmatrix}$, 则由式(19)求得 $K =$

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 1 - z_1 & -z_1 \\ z_2 & 0 & 1 & -z_2 & 1 - z_2 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } z_1 = \frac{1}{3}(1 + z_{11} - z_{14} - z_{15}) \text{ 和 } z_2 = \frac{1}{3}(1 + z_{21} - z_{24} - z_{25}) \text{ 为任意}$$

参数. 按单输入系统极点配置方法, 求得 $k_1 = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$, 其中 $d_1 = -(120 + 16z_1 + 101z_2)$, $d_2 = -(274 + z_1 + 16z_2)$, $d_3 = -(326 + z_2)$, $d_4 = 104 + 16z_1 + 101z_2$, $d_5 = 19 + 16z_1 + 101z_2$. 于是, 要求的反馈增益矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \bar{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ z_1 & 0 & 0 & 1 - z_1 & -z_1 \end{bmatrix}.$$

5 结束语

本文给出多输入定常线性系统极点配置定理充分性条件的一个新证明,并由此得到反馈增益矩阵的一般表达式.该表达式中含有可供任意选择的参数,通过对参数的适当选取,可适应控制系统的其他性能要求.文中还通过两个例题,说明了结果的正确性.显然,本文结果对完全能达的多输入离散定常线性系统的极点配置问题,同样适用.

参 考 文 献

- 1 王恩平,秦化淑,王世林.线性控制系统理论引论[M].广州:广东科技出版社,1991.236~241
- 2 王 翼.离散控制系统[M].北京:科学出版社,1987.95~101
- 3 陈启宗,王纪文.线性系统理论与设计[M].北京:科学出版社,1988.262~272
- 4 Patel R V, Munro N. Multivariable system theory and design[M]. Oxford, et al. Pergamon Press., 1982. 140~163
- 5 王朝瑞,史荣昌.矩阵分析[M].北京:北京理工大学出版社,1989.283~284
- 6 Lovass-nagy V, O kennon M R, Rabson G. Pole assignment using matrixx generalized inverses[J]. Int. J. Systems Sci. , 1981, 12(3): 383~392

A New Solution to the Pole Assignment by Using Generalized Inverse of Matrix

Gong Deen

(Dept. of Bus. Admini. , Huaqiao Univ. , 362011 Quanzhou)

Abstract A new solution to the pole assignment of multi-input system is proposed. By using generalized inverse of matrix, the sufficient condition of "pole assignment theorem" is proved; and the general expression containing arbitrary parameter is obtained for the feedback of gain matrix. By properly choosing arbitrary parameter, not only the pole assignment of close-loop system can be done arbitrarily but also its other performance demands can be satisfied. Two typical numerical examples account for the validity and the superiority of this new method.

Key words multi-input systems, pole assignment, general inverse of matrix