

文章编号 1000-5013(2000)01-0087-92

各向异性磁介质中载流直螺线管 轴 线 上 的 磁 场

李 强 王建成 苏武浔

(华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

摘要 利用毕奥-萨伐尔定律,并在磁导率 $\mu_{11} = \mu_{33}$ 的条件下,可求出各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上的磁场,以及载流直螺线管内部的磁场.显然,其使用条件受到限制.为此,有必要导出在 $\mu_{11} \neq \mu_{33}$ 的更一般情况下,各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上磁场和载流直螺线管内部的磁场.在已导出 $\mu_{11} \neq \mu_{33}$ 及各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上磁场的基础上,求出一般情况下各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上磁场,使其结果适用范围更广.

关键词 磁场, 各向异性, 螺线管

中图分类号 TM 154.3

文献标识码 A

在各向异性磁介质中磁矢势 A 的积分公式^[1-2]为

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sum_{j=1}^3 \Delta_{ij}}{|\mu_{ij}|} \frac{\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \mu_{nm}^{-1} (r_n r_m)^{1/2}}{\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \mu_{nm}^{-1} (r_n r_m)^{1/2}},$$

式中 $i=1, 2, 3$. 文[3]应用此公式,导出在各向异性磁介质中毕奥-萨伐尔定律的笛卡尔坐标形式.同时,求出 $\mu_{11} = \mu_{33}$ 的特殊情况下,在线性各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上,以及载流直螺线管内部的磁场和自感系数.文[4]进一步把该定律推广到极坐标形式,求出若干电流按曲线方程 $r = r(\theta)$ 分布的极坐标极点处的磁场.文[5], [6]应用各向异性磁介质中毕奥-萨伐尔定律,求解电流分布的磁场,并提供了范例.然而,文[5]的结果并不具有普遍性.文[6]研究了在 $\mu_{11} \neq \mu_{33}$ 的更一般情况下,各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上磁场,所得的结果具有普遍性.本文在文[6]的基础上,导出一般情况下各向异性磁介质中载流直螺线管轴线上磁场,其结果比文[6]更具普遍性.该结果为工程定量估计介质的各向异性对电流分布产生的磁场的影响,提供了理论依据.

1 各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上磁场

如图1所示,设有半径为 a 的圆线圈,通有电流 I ,置于 XOZ 平面内.线圈中心与坐标原点重合,而且使各向异性磁介质的3个主轴分别与直角坐标系的3个坐标轴平行.圆线圈轴

收稿日期 1999-04-19

作者简介 李 强(1974-),男,助教

基金项目 国家自然科学基金与福建省自然科学基金资助项目

© 1994-2010 China Academic Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

线上距离圆心为 y 的 P 点的磁场⁶⁾为

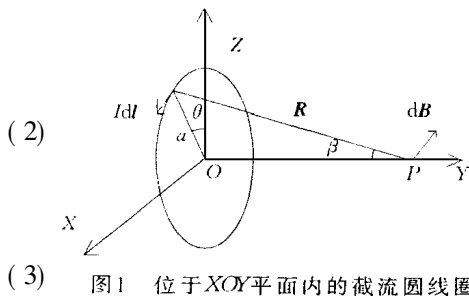
$$B(x) = B(y) = \frac{\mu \cdot \mu}{4\pi} \cdot e_2 \frac{IR \sin \beta dl}{(R^2/\mu_{11} + R^2/\mu_{22} + R^2/\mu_{33})^{3/2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{IR \sin \beta dl}{(R^2/\mu_{11} + R^2/\mu_{22} + R^2/\mu_{33})^{3/2}} e_2. \quad (1)$$

查椭圆积分表,可以得到式(1)的积分结果.也就是说,载流圆线圈轴线上一点的磁场为⁶⁾

$$B(y) = \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{Ia^2}{2} \frac{1}{c^3 + c^2d} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 K^2 - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right)^2 \frac{K^4}{3} - \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \right)^2 \frac{K^6}{5} - \dots \right], \quad (2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} K^2 &= d/c + d, \\ c &= y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33}, \\ d &= a^2/\mu_{11} - a^2/\mu_{33}. \end{aligned} \right\}$$



(3) 图1 位于XOY平面内的载流圆线圈

2 各向异性磁介质中载流直螺线管轴线上的磁场

如图2所示, 设长为 L , 半径为 a 的螺线管, 其轴线与 Y 轴平行. 通有电流 I , 每单位长度有 n 匝线圈, 求螺线管轴线上某点 P 的磁场.

在螺线管上, 距离 P 点为 y 的地方取一小段 dy , 这一小段上的线圈相当于电流为 $I ndy$ 的一个圆形电流. 应用公式(2), 可得这一小段上的线圈在 P 点产生的磁感应强度为

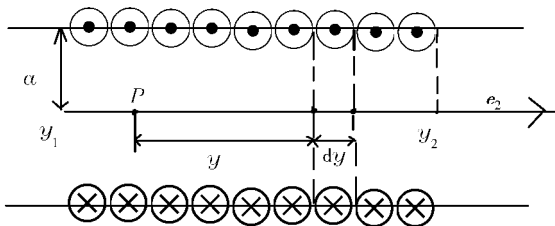


图2 沿 Y 轴的载流直螺线管

$$dB = \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{Ia^2 ndy}{2c(c+d)^{1/2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 K^2 - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right)^2 \frac{K^4}{3} - \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \right)^2 \frac{K^6}{5} - \dots \right].$$

把式(3)代入上式后得

$$B = \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{Ia^2 n}{2} \left[+ \frac{dy}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33})(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{1/2}} - d \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{dy}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33})(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{3/2}} - \frac{d^2}{3} \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right)^2 \frac{dy}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33})(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{5/2}} - \dots \right]$$

$$\frac{d^N}{2N-1} \left[\frac{(2N-1)!!}{2^N N!} \right]^2 \frac{dy}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33})(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{N+\frac{1}{2}} - \dots}, \quad (4)$$

式中的第 N 项积分记作 I_N . 则

$$I_0 = \frac{dy}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33})(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{1/2}}, \quad (5)$$

$$I_N = -\frac{d^N}{2N-1} \left[\frac{(2N-1)!!}{2^N N!} \right]^2 \frac{dy}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33})(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{N+\frac{1}{2}}} =$$

$$-\frac{d^N}{2N-1} \left[\frac{(2N-1)!!}{2^N N!} \right]^2 \frac{\mu_{22}^{N+\frac{3}{2}} dy}{(y^2 + a^2\mu_{22}/\mu_{33})(y^2 + a^2\mu_{22}/\mu_{11})^{N+\frac{1}{2}}}, \quad (6)$$

式中 $N = 1, 2, \dots$. 若令 $A = a^2\mu_{22}/\mu_{33}$, $F = a^2\mu_{22}/\mu_{11}$, $D_N = -\frac{d^N}{2N-1} \left[\frac{(2N-1)!!}{2^N N!} \right]^2 \mu_{22}^{N+\frac{3}{2}}$, ($N = 1, 2, \dots$), 代入式(6)得

$$I_N = D_N \frac{dy}{(y^2 + A)(y^2 + F)^{N+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{D_N}{F-A} \frac{1}{(y^2 + F)^{1/2}} \left[\frac{1}{(y^2 + A)(y^2 + F)^{N-1}} - \frac{1}{(y^2 + F)^N} \right] dy =$$

$$\frac{D_N}{F-A} \left[\frac{dy}{(y^2 + A)(y^2 + F)^{N-1+\frac{1}{2}}} - \frac{dy}{(y^2 + F)^{N+\frac{1}{2}}} \right]. \quad (7)$$

考虑到

$$D_N = \left\{ -\frac{d^{N-1}}{2N-3} \mu_{22}^{N-1+\frac{3}{2}} \left[\frac{(2N-3)!!}{2^{N-1}(N-1)!} \right]^2 \right\} d\mu_{22} \frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} =$$

$$d\mu_{22} \frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} D_{N-1}.$$

所以

$$I_N = \frac{d\mu_{22} \frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} D_{N-1}}{F-A} \left[\frac{dy}{(y^2 + A)(y^2 + F)^{N-1+\frac{1}{2}}} - \frac{dy}{(y^2 + F)^{N+\frac{1}{2}}} \right] =$$

$$\frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} \left[D_{N-1} \frac{dy}{(y^2 + A)(y^2 + F)^{N-1+\frac{1}{2}}} - D_{N-1} \frac{dy}{(y^2 + F)^{N+\frac{1}{2}}} \right] =$$

$$\frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} \left[I_{N-1} - D_{N-1} \frac{dy}{(y^2 + F)^{N+\frac{1}{2}}} \right] \quad (N = 2, 3, \dots).$$

下面计算积分 $\frac{dy}{(y^2 + F)^{N+\frac{1}{2}}}$. 令 $y = \sqrt{F} \operatorname{tg} \theta$ 则

$$\frac{dy}{(y^2 + F)^{N+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{F^N} \frac{\frac{y_2}{\operatorname{arctg} \frac{y_2}{F}}}{\frac{y_1}{\operatorname{arctg} \frac{y_1}{F}}} \cos^{2N-1} \theta d\theta =$$

$$\frac{1}{F^N} \sin \theta \sum_{r=0}^{N-1} \frac{2^{2N-2r-2} [(N-1)!]^2 (2r)!}{(2N-1)!(r!)^2} \cos^{2r} \theta \bigg|_{\operatorname{arctg} \frac{y_1}{F}}^{\operatorname{arctg} \frac{y_2}{F}},$$

$$I_N = \frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} \left[I_{N-1} - \frac{D_{N-1}}{F^N} \sin \theta \sum_{r=0}^{N-1} \frac{2^{2N-2r-2} [(N-1)!]^2 (2r)!}{(2N-1)! (r!)^2} \right. \\ \left. \cos^{2r} \theta \begin{cases} \theta = \arctg \frac{y_2}{F} \\ \arctg \frac{y_1}{F} \end{cases} \right] \quad (N = 2, 3, \dots). \quad (8)$$

由以上的计算可知,只要能够求出 I_0 和 I_1 ,就可结合 I_N 的递推式(8)求出式(4)的值.同时由式(7)可以看出, I_1 为两个积分的和.其中第二个积分已由上文求出,而第一个积分与 I_0 只差一个常数.所以,只要能求出 I_0 ,便可求出式(4)的值了.由式(5)得

$$I_0 = \frac{\mu_{22}^{\frac{3}{2}} dy}{(y^2 + a^2 \mu_{22}/\mu_{33})(y^2 + a^2 \mu_{22}/\mu_{11})^{\frac{1}{2}}} = \\ \frac{\mu_{22}^{\frac{3}{2}} dy}{(y^2 + A)(y^2 + F)^{\frac{1}{2}}}.$$

令 $y = \sqrt{A} \operatorname{ctg} \theta$ 所以

$$I_0 = \frac{\mu_{22}^{\frac{3}{2}}}{A} \frac{d\theta}{(A \operatorname{ctg}^2 \theta + F)^{1/2}}.$$

查积分表可得

$$I_0 = - \frac{\mu_{22}^{\frac{3}{2}}}{A} \frac{d\theta}{(A \operatorname{ctg}^2 \theta + F)^{1/2}} = \\ - \frac{\mu_{22}^{\frac{3}{2}}}{A} \frac{1}{F-A} \arccos \left(\frac{F-A}{F} \cos \theta \right) \begin{cases} \theta = \arctg \frac{y_2}{A} \\ \theta = \arctg \frac{y_1}{A} \end{cases} \quad (9)$$

所以式(4)的积分结果,即螺线管轴线上的磁场为

$$B = \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{I a^2 n}{2} (I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_N + \dots). \quad (10)$$

3 充满各向异性磁介质的无限长直螺线管的磁场

当螺线管无限长时, $y_1 = -$, $y_2 = +$. 由式(7)和式(9)得 $I_0 = 0$, $I_1 = -\frac{2D_1}{F(F-A)}$. 由式(8)可得

$$I_N = \frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} \left[I_{N-1} - \frac{D_{N-1}}{F^N} \frac{2^{2N-1} [(N-1)!]^2}{(2N-1)!} \right] = \\ \frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)^2} I_{N-1} - \frac{2^{2N-1} [(N-1)!]^2}{(2N-1)!} \frac{D_N}{(F-A)F^N} \quad (N = 2, 3, \dots).$$

把 I_N ($N = 0, 1, 2, \dots$) 代入式(10),可得到无限长螺线管内部磁感应强度公式.

当无限长螺线管在各向同性磁介质中时, $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, $d = 0$. 所以,由式(4)可得

$$B = \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{I a^2 n}{2} \frac{dy}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33})(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{1/2}} =$$

$$\frac{\mu I a^2 n}{2} \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{3/2}}).$$

令 $y = a \tan \theta$, 得 $B = \mu I n$, 这与公认的结果完全一致. 若 $\mu_{11} = \mu_{33}$, 则 $K^2 = 0$, 其计算过程类似于文 [6], 这里就不再讨论了.

参 考 文 献

- 1 陈 年, 陈 洁. 各向异性磁介质的电感新公式[J]. 电子科学学刊, 1991, 13(2): 159 ~ 168
- 2 陈 年, 王建成. 各向异性磁矢势 A 的微分方程及其解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(1): 90 ~ 97
- 3 王建成, 陈 年. 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(2): 125 ~ 132
- 4 王建成, 陈 年. 各向异性磁介质毕奥-萨伐尔定律极坐标形式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 354 ~ 357
- 5 王建成, 李 强, 苏武浔. 各向异性磁介质中载流圆线圈的磁场[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1999, 20(4): 415 ~ 418

Magnetic Field on Axial Line of Current-Carrying Solenoid in Anisotropic Magnetic Medium

Li Qiang Wang Jiancheng Su Wuxun

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ. 362011, Quanzhou)

Abstract In the anisotropic magnetic medium under the condition of magnetic permeability μ_{11} unequal to μ_{33} , the magnetic field on axis line of current-carrying coil and that inside current-carrying solenoid can be calculated by applying Biot-Savart law of that medium. As the condition of their service is restricted, it is necessary to derive the magnetic field on axial line of current-carrying coil and that inside current-carrying solenoid under more general condition of μ_{11} unequal to μ_{33} . On the basis of the magnetic field on axial line of current-carrying coil in anisotropic magnetic medium under the derived condition of μ_{11} unequal to μ_{33} , the authors obtain the magnetic field on axial line of current-carrying solenoid in anisotropic magnetic medium under general condition of μ_{11} unequal to μ_{33} . The result shows a wider applicable coverage.

Keywords magnetic field, anisotropy, solenoid