

文章编号 1000-5013(2000)01-0051-06

边界表示的拓扑与几何一致性

刘雄伟^① 彭 维^② 郑海波^①

(① 华侨大学机电工程系, 泉州 362011; ② 西北工业大学 CAD/CAM 研究中心, 西安 710072)

摘要 闭路拓扑原理和欧拉公式是检验实体模型边界表示的拓扑与几何一致性的重要工具. 有关文献对此问题的论述不妥. 文中在总结前人研究工作的基础上, 给出曲面上简单闭路总旋转角的精确定义, 并以球面为例分析曲面上简单闭路总旋转角的计算方法, 从而导出角度超出量的概念. 对多面体进行严格的定义, 给出欧拉公式及 Gauss-Bonnet 定理对多面体的应用条件. 最后给出多面体的广义欧拉特征值、广义 Gauss-Bonnet 定理及广义欧拉公式. 这些理论和方法, 共同构成实体模型边界表示的拓扑与几何一致性检验的有效工具.

关键词 简单闭路理论, 欧拉公式, Gauss-Bonnet 定理, 边界表示, 角度超出量, 总曲率

中图分类号 O 189.1

文献标识码 A

实体模型常用的表示方法, 有结构化实体几何(Constructive Solid Geometry)表示法和边界表示(Boundary Representation)法. 实体造型的主要功能是建立和存储实体模型. 实体造型系统通常保存两种描述模型的主要数据, 即几何数据和拓扑数据. 实体模型的表示必须遵守一组基本的几何原理, 并保证拓扑与几何的一致性. 在有关文献^[1-3]中, 曲面上简单闭路总旋转角的概念不准确, 球面上简单闭路总旋转角和角度超出量的描述和推导过程甚至是错误的. 另外, 只要涉及到多面体的欧拉公式, 这些文献得出的结论均是“ $v - e + f = 2$ 是简单多面体的欧拉公式”, 并且承认“简单多面体与球体拓扑等价”或“简单多面体是指那些所有能够连续变形成球体的多面体”. 我们经分析研究认为, 这个关于欧拉公式的结论是不准确的. 文[2]甚至将 Gauss-Bonnet 定理应用于六面穿孔长方体, 并声称其计算结果表明该模型的拓扑与几何是一致的. 我们认为这是一个严重的错误, 因为该多面体不是一个分片平曲面多面体, 根本不满足 Gauss-Bonnet 定理的前提条件. 本文针对这些问题, 首先完善了闭路拓扑理论的几个基本概念, 接着对多面体进行严格的定义, 并分析了欧拉公式对简单多面体的应用条件, 以及 Gauss-Bonnet 定理的应用条件. 在此基础上, 给出了广义欧拉公式、广义欧拉特征值和广义 Gauss-Bonnet 定理.

1 闭路理论

平面上的简单闭路理论, 指平面上非自交闭路的总旋转角为 $\pm 360^\circ$ ^[d, 2]. 为了推导曲面上

收稿日期 1999-04-19

作者简介 刘雄伟(1965-), 男, 教授

基金项目 福建省自然科学基金资助项目

的简单闭路理论, 必须严格定义平面上简单闭路总旋转角和曲面上简单闭路总旋转角.

定义 1 平面上简单闭路的总旋转角, 是在沿路径移动的过程中, 曲线的切矢绕平面的法矢旋转的角度之总和, 如图 1 所示($\tau = \sum \Delta \tau$).

表面上的简单闭路为拓扑盘的边界路径. 拓扑盘是通过拓扑变形, 可以变形为正方形内区域的曲面区域^[0,2].

定义 2 曲面上简单闭路的总旋转角, 指在沿路径移动的过程中, 曲线的切矢绕曲面上相应点的法矢旋转的角度(旋转角)之总和.

为便于理解, 我们以球面为例进行分析, 如图 2 所示. 图中 τ (总旋转角) = $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 270^\circ$; η (角度超出量) = $2\pi - \tau$. 设球面上的一个简单闭路由三段曲线组成. AB 段在球面的赤道上, BC 段和 CA 段在球面的子午线上, 每一段曲线均为 $1/4$ 圆周. 从路径的起点 A 沿 AB 段曲线走到点 B 的过程中, 曲线的切矢绕曲线在曲面上相应点的法矢没有转动, 即这一段路径的旋转角为 0; 当曲线的切矢在点 B 由 t_B^1 方向转到 t_B^2 方向的过程中, 其旋转角为 $\varphi = 90^\circ$. 同样, 从 B 到 C , 旋转角为 0; 由 t_C^1 方向转到 t_C^2 方向, 旋转角为 $\varphi = 90^\circ$; 从 C 到 A , 旋转角为 0; 由 t_A^1 方向转到 t_A^2 方向, 旋转角为 $\varphi = 90^\circ$. 累加三个旋转角, 得到

该路径的总旋转角为 $\tau = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 270^\circ$. 这个结果表明, 曲面上简单闭路的总旋转角不等于 $\pm 360^\circ$.

角度超出量定义为曲面上简单闭路的总旋转角与 360° 的角度差^[0,2]. 显然, 平面上简单闭路的角度超出量为 0.

简单闭路理论, 指对于任意表面上的简单闭路有

$$\tau + \eta = 360^\circ = 2\pi \quad (1)$$

其中 τ 为沿路径移动的总旋转角, η 为该路径的角度超出量.

推论 1 角度超出量的引入统一了平面上和表面上的简单闭路理论.

角度超出量具有可加性^[0,2], 后面的推导和论述均基于这一性质.

2 总曲率与曲面的亏格^[0,2]

由角度超出量的可加性可知, 对任意曲面的某个区域, 将它划分为多个小多边形, 计算每个多边形的角度超出量, 再将所有多边形的角度超出量相加, 其结果称为该曲面区域的总曲率, 用 Ω 表示. 容易证明, 整个球面的总曲率为 4π . 如果原始曲面区域本身就是多边形, 则上述总曲率可加性的意义就是: 总曲率 Ω 精确地等于围绕该多边形边界的角度超出量. 对于封闭曲面来说, 总曲率 Ω 是一个拓扑不变量.

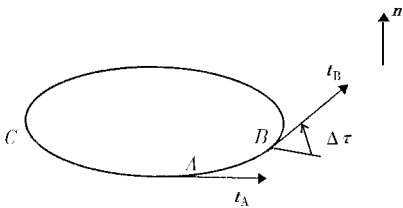


图 1 平面上简单闭路的总旋转角

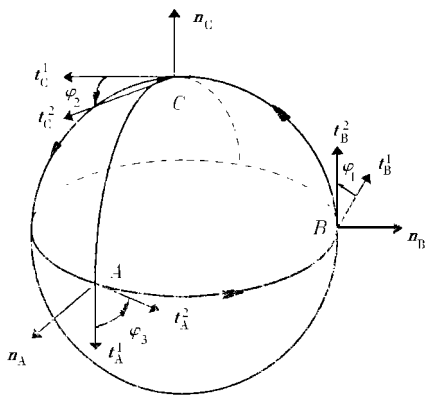


图 2 球面上简单闭路的总旋转角

可以证明, 与带 g 个环柄的球面拓扑等价的封闭曲面, 其总曲率可由下式求得, 即

$$\Omega = 4\pi(1 - g), \quad (2)$$

其中 g 称为该封闭曲面的亏格. 这一结论表明, 任何三维空间中的封闭曲面, 都拓扑等价于带有一定数量的环柄的球面.

重写表达式 (2), 可得封闭曲面的亏格与总曲率的关系为

$$g = \frac{4\pi - \Omega}{4\pi}. \quad (3)$$

3 多面体及其欧拉公式

多面体模型是实体模型边界表示的基础, 为此我们给出多面体的严格定义.

定义 3 一个多面体是指按下述意义, 很好地拼凑在一起的有限多个平面多边形. (1) 若两个多边形相交, 则它们交于一条公共边. (2) 一个多边形的每一条边, 恰好还是另一个多边形的边. (3) 一个多边形的每一条边, 有且只有两个端点. (4) 对于多面体的每个顶点, 那些含有它的多边形可以排列成 Q_1, Q_2, \dots, Q_s , 使得 Q_i 与 Q_{i+1} 有一条公共边, $1 \leq i < s$, 而 Q_s 与 Q_1 有一条公共边. 换句话说, 这些多边形拼成曲面上围绕着该点的一块区域(多边形的数目 s 则可以随顶点的不同而变化). 这一条件使两个多面体只在一个公共顶点相衔接的情况排除在外.

+ 简单多面体是拓扑学对几何造型的贡献之源, 十分重要.

定义 4 简单多面体是指那些所有与球体拓扑等价的多面体.

现讨论的多面体也称为封闭曲面. 就是说, 多面体中的面可以是曲面, 边可以是曲边. 图 3 给出了几个简单多面体. 将它们的顶点数(v) 减去棱边数(e), 再加上面的数目(f), 则对于这几个多面体所得到的都是 2. 然而, 公式 $v - e + f = 2$, 并非对于所有的简单多面体都适用.

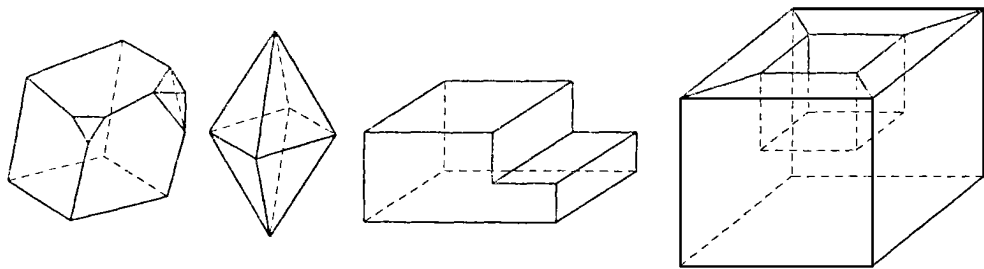


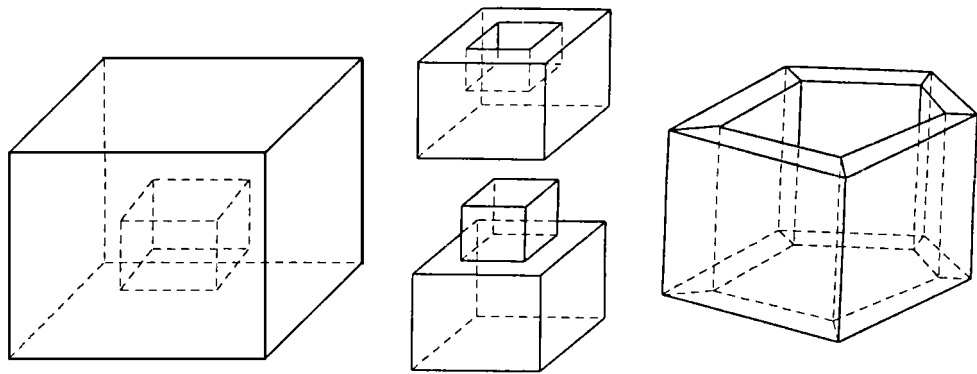
图 3 满足 $v - e + f = 2$ 的简单多面体

如果对图 4(a), (b), (c) 进行计算, 就分别得到 $v - e + f = 4$, $v - e + f = 3$ 和 $v - e + f = 0$. 图 4(a) 的多面体表面被分开成两块, 其表面不连通, 是空心多面体. 图 4(b) 的两个简单多面体都有一个面带有内环, 不是拓扑盘. 在图 4(c) 所示的多面体表面上, 可以找到一个不分割多面体表面为两部分的圈, 即该多面体的亏格不等于 0, 不是简单多面体. 可以证明, 如果一个多面体没有图 4 所列举的缺陷, 则该多面体必定满足 $v - e + f = 2$ 的关系.

欧拉公式^[8] 设 p 为满足下列条件的多面体: (1) p 的任何两个顶点可以用一串棱相连接; (2) p 上任何由直接段(不一定非是 p 的棱不可)构成的圈, 使 p 分割成两片, 则对于 p 有

$$v - e + f = 2. \quad (4)$$

显然, 欧拉公式中的条件 (1), 实际上说明 p 上的所有多边形面均为拓扑盘, 且 p 为非空心多



(a) 空心多面体

(b) 带内环面的简单多面体

(c) 穿孔棱柱

图4 不满足 $v - e + f = 2$ 的多面体

面体; 条件(2)则说明 p 的亏格为零, 即 p 与球体拓扑等价或 p 为简单多面体.

推论2 简单多面体不一定满足欧拉公式, 而满足欧拉公式的多面体必为简单多面体.

4 欧拉特征值及其与总曲率的关系

由于多面体的所有表面除边界之外处处都是平的, 而且所有边界又都是由直线段组成. 因此, 多面体的所有曲率都集中在顶点处, 只需将绕每个顶点的小路径的角度超出量加起来, 就可得到多面体的总曲率为

$$\Omega = \sum_{i=1}^v \eta_i, \quad (5)$$

其中 v 是多面体的顶点数, η_i 是绕多面体第 i 个顶点的小路径的角度超出量.

依据简单闭路理论, 重写表达式(5)可得

$$\Omega = \sum_{i=1}^v (2\pi - \tau_i) = 2\pi v - \sum_{i=1}^v \tau_i, \quad (6)$$

其中 τ_i 是绕多面体第 i 个顶点的小路径的总旋转角.

如图5所示, 由于跨越边界的旋转角为0, 绕一个顶点的总旋转角等于汇集在该点的所有内角和. 相加多面体所有顶点的内角, 可以得到多面体上所有面的全部内角和. 根据每个内角所在的面重新组合这些内角, 可得

$$\Omega = 2\pi v - \sum_{i=1}^f \alpha_i, \quad (7)$$

其中 f 是多面体的面数, α_i 是多面体第 i 个面的内角和.

推论3 总曲率的计算纯粹是一个几何问题.

例如, 对于长方体, $v = 8, f = 6$, 每个面的内角和均为 2π . 代入表达式(7), 可得其总曲率 $\Omega = 2\pi \times 8 - 6 \times 2\pi = 4\pi$. 代入表达式(3), 可得其亏格 $g = 0$. 图4(b)所示的每个多面体, $v = 16, f = 11$, 其中10个面的内角和均为 2π , 1个面(带内环的上表面)的内角和为 $4 \times \frac{\pi}{2} + 4 \times \frac{3\pi}{2} = 8\pi$, 其总曲率 $\Omega = 4\pi$, 其亏格 $g = 0$. 图6所示的多面体, $v = 48, f = 26$, 其中16个面的内角和均为 2π , 10个面(带内环

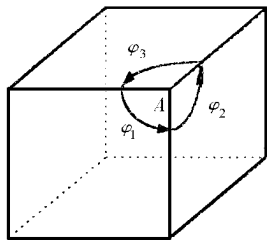


图5 绕顶点A的总旋转角计算

$$\tau = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

的表面)的内角和为 8π , 其总曲率 $\Omega = -16\pi$, 其亏格 $g = 5$ (有趣的是 $g = 6$, 文献 [2] 认为该多面体的 $g = 6$, 我们认为这是一个错误)。

推论 4 表达式 (7) 对所有满足多面体基本条件且不是空心的多面体均适用。

假定多面体中的每个面均为拓扑盘 (即多面体为分片平面多面体^[0,2]), 则每个面的外角和均为 2π 。在每个面中, 每个外角与其相应的内角之和为 π , 并且在每个面中内、外角的对数与边的数目相同。即

$$\alpha_i = \pi \times e_i - 2\pi,$$

其中 e_i 是多面体第 i 个面的边的数目。因此, 对所有面 f 的内角和可重写为

$$\sum_{i=1}^f \alpha_i = \pi \sum_{i=1}^f e_i - 2\pi f. \quad (8)$$

在一个多面体中, 由于每条边严格地属于两个面。因此, 把每个面的边的数目加起来正好等于多面体的边的数目 e 的两倍, 即

$$\sum_{i=1}^f e_i = 2e. \quad (9)$$

合并表达式 (8) 和 (9), 可得

$$\sum_{i=1}^f \alpha_i = 2\pi(e - f). \quad (10)$$

将表达式 (10) 代入表达式 (7), 可得

$$\Omega = 2\pi(v - e + f). \quad (11)$$

定义 5 $x = v - e + f$, 称为分片平面多面体的欧拉特征值。

定义 6 $\Omega = 2\pi x$, 称为分片平面多面体的 Gauss-Bonnet 定理^[0,2]。

推论 5 分片平面多面体的 Gauss-Bonnet 定理^[0,3], 它是计算分片平面多面体总曲率的简便方法。但是, 对于非分片平面表示的多面体不适用。

例如, 对于长方体, $v - e + f = 2$, 代入定义 6 可得 $\Omega = 4\pi$ 。但对于图 4(b) 所示的两个多面体, $v - e + f = 3$, 代入定义 6 得 $\Omega = 6\pi$, 这一结论显然是错误的。同样, 对于图 6 所示的多面体, $v - e + f = 2$, 代入定义 6 得 $\Omega = 4\pi$, 代入表达式 (3) 得其亏格 $g = 0$, 显然这一结论也是错误的。然而, 对图 4(c) 所示的穿孔棱柱, $v - e + f = 0$, 代入定义 6 得 $\Omega = 0$, 代入表达式 (3) 得其亏格 $g = 1$, 结论显然是正确的。这是因为该多面体中的所有面均为拓扑盘。

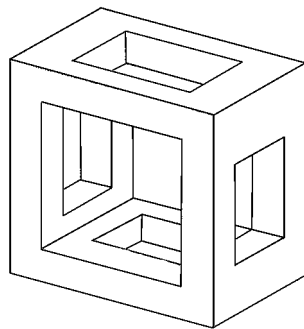


图 6 六面穿孔长方体

$$v = 48, e = 72, f = 26, v - e + f = 2$$

$$\Omega = 2\pi v - \sum_{i=1}^f \alpha_i = -16\pi, g = \frac{4\pi - \Omega}{4\pi} = 5$$

5 广义欧拉公式和广义欧拉特征值

从以上的推导过程可知, 定义 5, 6 只对分片平面多面体适用, 对于带有内环表面的多面体不适用。那么, 对于带有内环表面和亏格不等于 0 的多面体, 有没有类似的欧拉公式和 Gauss-Bonnet 定理, 值得探讨。对于具有 l 个内环的简单多面体, 如果将 $l + e$ 替代欧拉公式中的边的数目 e , 便可得到简单多面体的欧拉公式为

$$v - e + f - l = 2. \quad (12)$$

定义 7 $x = v - e + f - l$, 称为多面体的广义欧拉特征值, 表达式 $\Omega = 2\pi x$ 称为多面体的广

义 Gauss-Bonnet 定理.

将多面体的广义欧拉特征值和广义 Gauss-Bonnet 定理代入表达式(2), 并进行整理可得多面体的广义欧拉公式为

$$v - e + f - l = 2 - 2g. \quad (13)$$

显然, 表达式(13) 适用于所有非空心的多面体.

6 结论

文中全面系统地分析了实体模型边界表示的拓扑与几何一致性的检验方法. 大量的实例、分析表明: 本文所得出的结论是正确的, 可作为实体模型边界表示有效性检验的工具.

参 考 文 献

- 1 Mortenson M E. Geometric modeling: chapter 9——solid modeling fundamentals[M]. New York: John Wiley & Sons, 1985. 372 ~ 430
- 2 欧阳春梅. 实体造型技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991. 28 ~ 89
- 3 孙家广, 陈玉键, 辜凯宁. 计算机辅助几何造型技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990. 65 ~ 90
- 4 Armstrong M A 著. 基础拓扑学[M]. 孙以丰译. 北京: 北京大学出版社, 1983. 2 ~ 30

The Consistency in Topology and Geometry of Boundary Representation

Liu Xiongwei^① Peng Wei^② Zheng Haibo^①

(^① Dept. of Electromech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou;

^② CAD/CAM Res. Cent., Northwest. Polytechn. Univ., 710072, Xian)

Abstract For inspecting topological and geometrical unanimity of a solid model, principle of closed path topology and Euler's formula are important tools. On which the exposition of related literatures was inappropriate. Starting from the summation of predecessors' studies, the authors put forward their theory and method to make up effective tool for its inspection. Firstly, a precise definition is given to the angle of resultant rotation of a simple closed path on a curved surface, and an analysis is made on its calculation with spherical surface as example, and thus a concept of angle excess is derived. Secondly, a strict definition is given to polyhedra, and the conditions are given for applying Euler's formula and Gauss-Bonnet Theorem to polyhedra. Finally, the generalized Euler eigenvalue and the generalized Gauss-Bonnet Theorem and the generalized Euler's formula are given to polyhedra.

Keywords simple closed-path theory, Euler's formula, Gauss-Bonnet Theorem, boundary representation, angle excess, total curvature