

文章编号 1000-5013(2000)01-0011-05

# 二维对流扩散方程的 AGE 方法

郑兴华

(福建实达电脑公司, 福州 350002)

**摘要** 将求解二维对流扩散方程的 Samarskii 型差分格式, 改造成一个交替分组显式(AGE)格式. 该格式是绝对稳定的, 并具有明显的并行性质. 最后通过数值试验, 将数值结果与解析解用立体图形进行比较. 结果表明, 本方法具有良好的稳定性和较高的计算精度.

**关键词** 对流扩散方程, 交替分组显式方法, Samarskii 格式

**中图分类号** O 241.82

**文献标识码** A

在自然科学的许多领域中, 很多现象是用对流扩散方程或方程组描述的. 如热量、空气 flows、土壤水流等的对流扩散现象. 因此研究它的数值方法引起了充分的重视, 目前已有许多算法, 特别是一维情形也有不少较好的并行算法<sup>[1~4]</sup>. 对于二维对流扩散方程的情形, 由于稳定性证明较为复杂, 到目前为止还很少有人研究它的并行算法. 本文基于 Samarskii 格式构造了一个二维对流扩散方程的交替分组显式格式, 即 AGE(Alternating Group Explicit) 格式. 它具有明显的并行性质, 既适合于大型并行计算机和向量计算机上计算, 又适合于普通串行计算机上计算. 最后通过数值试验, 将数值结果与解析解用立体图形进行比较. 结果表明, 本文的方法具有良好的稳定性和较高的计算精度.

## 1 差分格式的构造

考虑二维对流扩散方程初边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \epsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (0 \leq x, y \leq 2, t > 0), \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \quad (0 \leq x, y \leq 2), \\ u(0, y, t) = g^1(y, t), u(2, y, t) = g^2(y, t) \quad (0 \leq y \leq 2, t > 0), \\ u(x, 0, t) = g^3(x, t), u(x, 2, t) = g^4(x, t) \quad (0 \leq x \leq 2, t > 0). \end{array} \right. \quad (1)$$

在  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 2\}$  区域上进行剖分网格, 其网格点  $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, i, j = 0, 1, \dots, m$ ,  $t_k = k\Delta t, k = 0, 1, \dots, m\Delta x = m\Delta y = 2$ . 问题(1)中方程的显式 Samarskii 格式为

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = a \left( \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right) + (R +$$

$$\frac{1}{1+R})\epsilon\left[\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2}\right], \quad (2)$$

其中  $R = \frac{|a|h}{4\epsilon}$ .

设  $v = (R + \frac{1}{1+R})\epsilon$ , 在点  $(i, j, k), (i+1, j, k), (i+1, j+1, k), (i, j+1, k)$  及  $(t = k + \frac{1}{2})\Delta t$  处, 分别用以下 4 组差分格式逼近式(1)的方程. 即

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = a \left[ \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right] + v \left[ \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right], \quad (3)$$

$$\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^k}{\Delta t} = a \left[ \frac{u_{i+2,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j-1}^k}{2\Delta y} \right] + v \left[ \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^k + u_{i+2,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right], \quad (4)$$

$$\frac{u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^k}{\Delta t} = a \left[ \frac{u_{i+2,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^{k+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1,j+2}^{k+1} - u_{i+1,j}^k}{2\Delta y} \right] + v \left[ \frac{u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^k + u_{i+2,j+1}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^k + u_{i+1,j+2}^k}{(\Delta y)^2} \right], \quad (5)$$

$$\frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^k}{\Delta t} = a \left[ \frac{u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i-1,j+1}^k}{2\Delta x} + \frac{u_{i,j+2}^{k+1} - u_{i,j}^k}{2\Delta y} \right] + v \left[ \frac{u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^k + u_{i+1,j+1}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^k + u_{i,j+2}^k}{(\Delta y)^2} \right]. \quad (6)$$

为简单起见, 设  $\Delta x = \Delta y = h, \Delta t = \tau, r = v\tau/h^2, p = a\tau/2h$ . 联立方程(3)~(6), 其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -(r+p) & 0 & -(r+p) \\ -(r-p) & 1+2r & -(r+p) & 0 \\ 0 & -(r-p) & 1+2r & -(r-p) \\ -(r-p) & 0 & -(r+p) & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j}^{k+1} \\ u_{i+1,j}^{k+1} \\ u_{i+1,j+1}^{k+1} \\ u_{i,j+1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i,j}^k \\ f_{i+1,j}^k \\ f_{i+1,j+1}^k \\ f_{i,j+1}^k \end{bmatrix}. \quad (7)$$

记式(7)为

$$Au^{k+1} = f^k, \quad (8)$$

其中  $f$  为式(3)~(6)中对应的第  $k$  层上的值. 它可被显式地写为

$$u^{k+1} = A^{-1}f^k, \quad (9)$$

其中

$$A^{-1} = \frac{1}{(1+2r)(1+4r+4p^2)} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta\delta & 2\beta^2 & \beta\delta \\ \gamma\delta & \alpha & \beta\delta & 2\beta\gamma \\ 2\gamma^2 & \gamma\delta & \alpha & \gamma\delta \\ \gamma\delta & 2\beta\gamma & \beta\delta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中  $\alpha = 1+4r+2r^2+2p^2, \beta = r+p, \gamma = r-p, \delta = 1+2r$ .

靠近边界的点将采用不同的格式进行处理, 如图 1 所示. 在图中的位 1, 可由式(5), (6)并同时令  $j=0$ , 可得

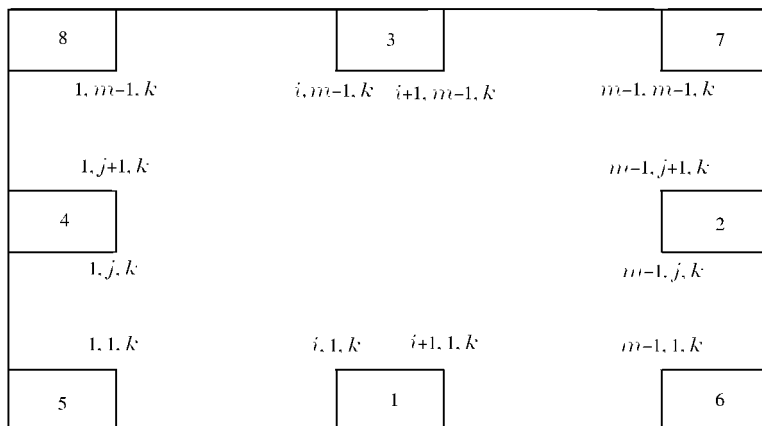


图 1 边界网格点图

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -(r+p) \\ -(r+p) & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,1}^{k+1} \\ u_{i+1,1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i,1}^k \\ f_{i+1,1}^k \end{bmatrix}. \quad (11)$$

式(11)可进一步改写为

$$\begin{bmatrix} u_{i,1}^{k+1} \\ u_{i+1,1}^{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+4r+3r^2+p^2} \begin{bmatrix} 1+2r & r+p \\ r-p & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{i,1}^k \\ f_{i+1,1}^k \end{bmatrix}. \quad (12)$$

在位 2~位 4, 类似可由式(4)~(6)显式求解. 在位 5, 由式(5)令  $i=j=0$ , 得

$$u_{1,1}^{k+1} = \frac{1}{1+2r} \{ (r-p)u_{0,1}^{k+1} + (r-p)u_{1,0}^{k+1} + (r+p)u_{2,1}^k + (1-2r)u_{1,1}^k + (r+p)u_{1,2}^k \}. \quad (13)$$

在位 6~位 8, 类似可由式(6), (3), (4)显式求解.

下面就  $m$  为奇数和偶数分别进行讨论. (1) 分点数  $m$  为偶数. (a) GER 格式: 仿照文[5], 从点  $(1, 1, k+1)$  开始的前  $\left(\frac{m-2}{2}\right)^2$  组点用方程(9)计算, 其余的点按图 1 所示位置进行计算.

(b) GEL 格式: 类似于 GER 格式进行计算. (2) 分点数  $m$  为奇数. 有  $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$  个成组的点或  $\left(\frac{m-3}{2}\right)^2$  成组的点, 后者含不成组的点, 类似  $m$  为偶数可形成 GEU 格式与 GEC 格式. 在不同时间层的点交替采用 GER, GEL 或 GEU, GEC 进行计算, 即

GER GEL GER GEL ... 或 GEU GEC GEU GEC ....

由以上两种情况构造出来的交替分组显式(AGE)格式, 可以形成有效的并行算法. 将式(3)~(6)分别在点  $(i, j, k), (i+1, j, k), (i+1, j+1, k), (i, j+1, k)$  处进行 Taylor 级数展开, 各方程的截断误差阶为  $O(\frac{\tau}{h} + \tau + \tau h + h^2)$ , 因此相容性是有条件的, 即当  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$  时要求  $\frac{\tau}{h}$

$\rightarrow 0$ , 但在 GER(GEU) 与 GEL(GEC) 算法中, 由于在不同网格点上, 截断误差中含有  $\frac{\tau}{h}$  的项在量上值相等, 而符号相反, 因此能够相互抵消, 截断误差近似为  $O(\tau + \tau h + h^2)$ . 而在 AGE 格式中, 在不同时间层上也有相类似的作用, 所以在实际计算中精度是高的. 本文就第一种情形, 即分点数  $m$  为偶数情形的 AGE 格式进行进一步的讨论, 第二种情形完全类似, 不再重述.

## 2 稳定性讨论

令  $q = \frac{p}{r}$ , GER 格式的矩阵形式为

$$(I + rG_1)U^{k+1} = (I - rG_2)U^k + b_{1,t}, \quad (14)$$

其中  $G_1, G_2$  均为  $(m-1)^2$  阶对角块矩阵;  $b_{1,t}$  为与边界有关的列矩阵;  $U^{k+1}$  按行形成的组进行排列. 类似可得 GEL 格式的矩阵形式为:

$$(I + rG_2)U^{k+1} = (I - rG_1)U^k + b_{2,t}. \quad (15)$$

从而, AGE 格式的矩阵形式为

$$\begin{cases} (I + rG_1)U^{k+1} = (I - rG_2)U^k + b_{1,t}, \\ (I + rG_2)U^{k+2} = (I - rG_1)U^{k+1} + b_{2,t}. \end{cases} \quad (16)$$

为证明 AGE 格式的稳定性定理, 需要用到如下引理.

**引理 1** 此即 Kellogg 引理<sup>[6]</sup>. 设  $\rho > 0$ , 如果  $B + B^T$  为非负定矩阵, 那么有估计式

$$(I - \rho B)(I + \rho B)^{-1} \leq I. \quad (17)$$

**引理 2**  $G_1 + G_1^T, G_2 + G_2^T$  是非负定矩阵.

由以上引理, 容易证明如下定理.

**定理** AGE 格式是无条件稳定的. 因篇幅关系, 从略.

## 3 数值例子

数值解与解析解的立体比较图, 如图2所示. 由于条件的限制, 本文的计算是在奔腾586

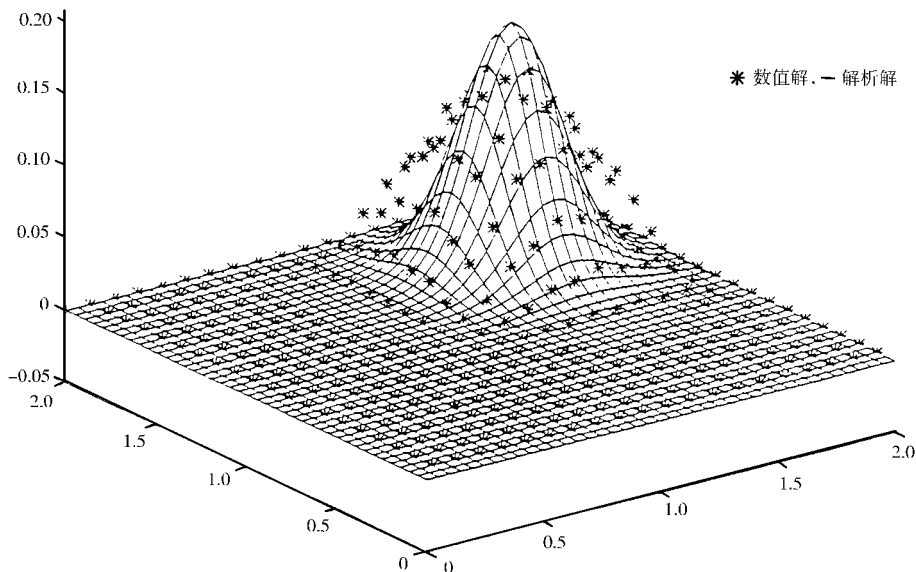


图2 数值解与解析解立体比较图

微机上进行的. 首先, 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (18)$$

在  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 2\}$  区域上, 给定初始条件.

$$u(x, y, 0) = \exp\left\{-\frac{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}{\epsilon}\right\} \quad (19)$$

的解析解<sup>[6]</sup>为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4t + 1} \exp\left\{-\frac{(x + at - 0.5)^2 + (y + at - 0.5)^2}{\epsilon(4t + 1)}\right\}. \quad (20)$$

边界条件由式(18)给出.

选取  $\epsilon = 0.01$ ,  $a = -0.8$ ,  $t = 1.25$ . 当  $\tau = 0.0125$ ,  $h = 0.1$  时计算到  $t = 1.25$ , AGE 方法的数值解的平均绝对误差为 0.007 1, 最大绝对误差为 0.064 4, 最小绝对误差为 0. 图 2 为数值解与解析解的立体比较图. 从绝对误差与图形的拟合情况来看, AGE 方法计算结果较为理想, 计算精度高. 由于这是显式计算, 因此它又具有很好的并行性.

曾文平教授对本文悉心指导, 在此表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

- 1 Zeng Wenping. A group explicit method of sauly'ev type for solving diffusion-convection equation[ A]. 见: 1997 第四届国际计算物理会议组委会编. 1997 第四届国际计算物理会议论文集[ C]. 新加坡: 新加坡理工大学出版社, 1997. 86~91
- 2 Evans D J, Abdulah A R B. The group explicit method for the solution of Burgers equation[ J]. Computing, 1984, 32: 293 ~ 253
- 3 Evans D J, Sahimi M S. The numerical solution of Burgers equation by the alternating group explicit (AGE) method[ J]. Int. J. Computer Math., 1989, 29: 39 ~ 64
- 4 王子丁, 陆金甫, 肖世江. Burgers 方程的一个分组显式格式[ J]. 计算物理, 1993, ( 4 ): 479 ~ 487
- 5 Noye B J, Tan H H. Finit difference methods for solving the two-dimensional advection-diffusion equation [ J]. Int. J. numerical methods fluids, 1989, 9: 75 ~ 98

## Alternating Group Explicit Method for Solving Two-Dimensional Convection-Diffusion Equation

Zheng Xinghua

( Fujian Start Computer Co. Ltd., 350002, Fuzhou)

**Abstract** An alternating group explicit (AGE) scheme is constructed on the basis of Samarskii difference scheme for solving two-dimensional convection-diffusion equation. The AGE scheme is absolutely stable and is imbued with distinct parallelism. By way of numerical experiment, the numerical results are compared with three-dimensional stereogram for the use of analytical solution. The results indicate that the method has a good stability and a higher computational accuracy.

**Key words** convection-diffusion equation, alternating group explicit method, Samarskii scheme