第21卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.21 No.1
2000年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan.2000

文章编号 1000-5013(2000)01-0008-03

Reich 的一个定理改进及其相关问题

刘 金 雄

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi_0(z)$, $a.e.$, $\lim_{n\to\infty}\iint_\Omega[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\,dx\,dy=0$, 其中 κ_f 为 f 的复特征, Reich 证明 f 是唯一极值映照. 在此基础上, 证明去掉 f 为 Teichmüller 映照这一假设, Reich 的结论仍成立. 文中还得到在一定条件下, Reich 这一结论的逆命题也成立.

关键词 拟共形映照, 唯一极值映照, Teichmüller 映照

中图分类号 O 174.55 文献标识码 A

记 Ω 是复平面 $\mathbf{C}$ 上边界多于一点的一个区域, f 为 Ω 上的一个拟共形映照. Q_f 表示 Ω 上与 f 有相同边界值, 且同伦的拟共形映照全体所组成的类. 对任一 $g\in Q_f$, 置

$$\kappa_g(z)=g_{\bar z}/g_z,\qquad \|\kappa_g\|_\infty=\operatorname{ess}\sup_{z\in\Omega}|\kappa_g(z)|.$$

f 是极值的, 意指 $\|\kappa_f\|_\infty=\inf_{g\in Q_f}\|\kappa_g\|_\infty$. 若这样的 f 是唯一的, 则 f 是唯一极值映照.

若拟共形映照的复特征形式为

$$\kappa_f(z)=f_{\bar z}/f_z=k\bar\varphi_0/|\varphi_0|,\ a.e.,$$

其中 k 为常数, $0\le k<1$, $\varphi_0\neq0,\infty$, $a.e.$. 则当 φ_0 为 Ω 上的可测函数时, 称 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照; 当 φ_0 在 Ω 上解析时, 称 f 为关于 φ_0 的正则 Teichmüller 映照.

$\beta(\Omega)$ 表示 $L^1(\Omega)$ 中的解析函数的全体所成的 Banach 空间, $\varphi\in\beta(\Omega)$, 其范数

$$\|\varphi\|=\iint_\Omega|\varphi(z)|\,dx\,dy<\infty.$$

对于 $\varphi\in\beta(\Omega)$, 记

$$\delta\{\kappa_f,\varphi\}=k\|\varphi\|-\mathrm{Re}\iint_\Omega\kappa_f\varphi\,dx\,dy,\tag{1}$$

其中 $k=\|\kappa_f\|_\infty$.

定理A[1] 设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi_0(z),\ a.e.,\tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\delta\{\kappa_f,\varphi_n\}=0,\tag{3}$$

收稿日期 1999-06-07 作者简介 刘金雄(1968-), 男, 讲师

基金项目 福建省自然科学基金资助项目

则 f 是唯一极值映照.

定理 B [2]　设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi_0(z),\quad a.\ e.\quad z\in\Omega,\quad \varphi_0\in L^1_{loc}(\Omega),\tag{4}$$

$$\delta\{\kappa_f,\varphi_n\}\le M,\quad n=1,2,\cdots,\tag{5}$$

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{\Omega(n,A)}|\varphi_n(z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\tag{6}$$

此式对 n 一致, 其中 $\Omega(n,A)=\{z\in\Omega:|\varphi_n(z)|>A|\varphi_0(z)|\}$, 则 f 是唯一极值映照.

定理 C [3]　设 f 为关于 φ_0 的 Teichmüller 映照, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 满足式(4), (5) 和

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\tag{7}$$

此式对 n 一致, 其中 $\Omega(n,A)$ 与式(6) 中的相同, 则 f 唯一极值映照.

本文证明, 定理 A 在不假定 f 为 Teichmüller 映照的情况下, 结论仍成立. 我们有

定理 1　设 f 为 Ω 上的一个拟共形映照, $\|\kappa_f\|_\infty=k$, 若存在函数列 $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$, 满足条件(2), (3), 其中 $\varphi_0\neq 0,\infty$, $a.e.$. 则 $\kappa_f(z)=k\overline{\varphi_0}/|\varphi_0|$, $a.e.$, 且 $f(z)$ 是唯一极值映照.

文 [2] 中提出定理 A 的逆是否为真这一问题. 本文证明, 在较强的条件下, 定理 A 的逆是成立的. 我们有

定理 2　设 $\kappa_f=k\overline{\varphi_0}/|\varphi_0|$, κ_f 满足条件(2) 和(7), 且 $\iint_\Omega|\varphi_0|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty$, 则 κ_f 满足条件(3).

1　定理 1 的证明

定理 1 要证明的只是第一部分的结论.

由于 $k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_n(z))\ge 0$, 故由 Fatou 引理, 我们有

$$\iint_\Omega\lim_{n\to\infty}[k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_n(z))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le\varliminf_{n\to\infty}\iint_\Omega[k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_n(z))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

注意到条件(2) 和(3), 便有

$$\iint_\Omega[k|\varphi_0(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_n(z))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

因为 $k|\varphi_0(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_0(z))\ge 0$, 从而 $k|\varphi_0(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_n(z))=0$, $a.\ e.$, 于是, $k|\varphi_0(z)|-\kappa_f(z)\varphi_n(z)=0$, $a.e.$. 即 $\kappa_f=k\overline{\varphi_0}/|\varphi_0|$, $a.e.$, 定理 1 证毕.

2　定理 2 的证明

置

$$F_n(z)=\begin{cases}0 & z\in\Omega(n,A),\\ k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n) & z\in\Omega\setminus\Omega(n,A).\end{cases}$$

当 $z\in\Omega\setminus\Omega(n,A)$ 时, $|\varphi_n(z)|\le A|\varphi_0(z)|$, 便有

$$0\le F_n(z)\le 2kA|\varphi_0(z)|\le 2A|\varphi_0(z)|,\quad z\in\Omega$$

因为 $\iint_{\Omega}|\varphi_0(z)|\,dx\,dy<\infty$, $\lim_{n\to\infty}F_n(z)=0$, Lebesgue 控制收敛定理给出

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega\setminus\Omega(n,A)}[k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_n(z))]\,dx\,dy=$$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega}F_n(z)\,dx\,dy=\iint_{\Omega}\lim_{n\to\infty}F_n(z)\,dx\,dy,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega\setminus\Omega(n,A)}[k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}(\kappa_f(z)\varphi_n(z))]\,dx\,dy=0. \tag{8}$$

$\forall\,\epsilon>0$, 由式(7), 存在 $A_0>0$, 使得

$$\iint_{\Omega(n,A_0)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}\kappa_f\varphi_n]\,dx\,dy<\epsilon/2. \tag{9}$$

由式(8), 存在正整数 N_0, 当 $n>N_0$ 时, 有

$$\iint_{\Omega\setminus\Omega(n,A_0)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\,dx\,dy<\epsilon/2. \tag{10}$$

利用式(9), (10) 便有, 当 $n>N_0$ 时,

$$\delta\{\kappa_f,\varphi_n\}<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.$$

因此 κ_f 满足条件(3).

定理 2 证毕.

参 考 文 献

1 Reich E. A criterion for unique extremality of Teichmüller mappings[J]. India Univ. Math. J., 1981, (30): 441～447

2 Reich E. On criteria for unique extremality of Teichmüller meppings[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math., 1981, (6): 289～301

3 刘增荣. Reich 的一个定理的改进[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(1): 1～5

Improving One of Reich´s Theorems and Problem Correlated with It

Liu Jinxiong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Assuming f to be Teichmüeller mapping of φ_0. Reich proved that f is the uniquely extremal mapping if there exist function sequence $\{\varphi_n\}\subset\beta(\Omega)$ to make $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi_0(z)$, *a.e.*, $\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(\kappa_f\varphi_n)]\,dx\,dy=0$, where κ_f is composite character of f. On this basis, the author proves that Reich´s conclusion can be established even if f is not assumed to be Teichmüller mapping; and that the inverse proposition of Reich´s conclusion can also be established under definite condition.

Keywords quasiconformal mapping, uniquely extremal mapping, Teichmüeller mapping