第 21 卷　第 1 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 21　No. 1
2000 年 1 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jan. 2000

文章编号　1000-5013(2000)01-0001-07

高阶演化方程任意阶精度的显式格式

曾　文　平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　讨论高阶演化方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$(其中 $a\neq 0$ 为实常数, $k=1,2,3,\cdots$)的 2 层与 3 层显式差分格式. 已有格式的精度是 $O(\tau+h)$ 或 $O(\tau+h^2)$. 利用半离散化方法给出一类具有任意阶精度 $O(\tau^p+h^q)$ $(p, q=1, 2, \cdots)$ 的显式格式, 讨论 $p=3, 4, q=2k, 2(k+1), 2(k+2)$ (2 层格式) 和 $p=2, 4, q=2k, 2(k+1), 2(k+2)$ (3 层格式) $(k=1, 2, 3, 4)$ 的情况, 导出两种格式的稳定性条件. 这些条件优于其它同类格式, 且所得结果包含了前人的研究结果.

关键词　高阶演化方程, 高精度显式差分格式, 稳定性分析

中图分类号　O 241.82　　文献标识码　A

文 [1] 对方程 $u_t=au_{x^s}$ 当 s 为奇数及偶数的情况, 分别建立若干差分格式. 但已有的 2, 3 层显式差分格式, 其精度仅为 $O(\tau+h)$ 及 $O(\tau+h^2)$. 本文对 s 为奇数即($s=2k+1$)的高阶演化方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$的周期初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} && (0<x<L, 0<t\leq T, a\neq 0 \text{ 的实常数}),\\ &u(x,0)=\varphi(x) && (0\leq x\leq L),\\ &u(x+L,t)=u(x,t) && (L \text{ 为周期}),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

应用半离散化方法构造了任意阶精度 $O(\tau^p+h^q)$ 的显式格式. 将讨论 2 层格式($p=3, 4, q=2k, 2(k+1), 2(k+2)$)及 3 层格式($p=2, 4, q=2k, 2(k+1), 2(k+2)$)的情形, 导出 2, 3 层显式格式的精度和稳定性条件. 几乎都优于现有的偏心格式的精度 $O(\tau+h)$ 和稳定性条件 $|R|\leq 1/2^{2k}$. 我们的结果包含了文 [2] 对色散方程所得的结果.

1　差分格式的构造

考虑周期初值问题(1), 在区间 $0\leq x\leq L$ 上半离散化方程, 取步长 $\Delta x=h=L/N$, 记 $x_j=jh$, $u_j=u(x_j, t)$. 先用待定系数法建立$\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$的数值微分公式. 设 $C_{k,m,l}$ 为待定系数, 且

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)_j=\frac{1}{h^{2k+1}}\sum_{l=1}^{m}C_{k,m,l}(u_{j+l}-u_{j-l})+\rho_j(m)\qquad(m>k),\tag{2}$$

收稿日期　1999-07-23　　作者简介　曾文平(1940-), 男, 教授

基金项目　福建省自然科学基金资助项目

其中 $\rho_j(m)$ 表示余项. 分别把 $u_{j\pm l}$ 在点 x_j 的 Taylor 展开式代入式(2), 令诸导数 $u', u'', \cdots, u^{(2m-1)}$ 的系数为 0, 而 $u^{(2k+1)}$ 阶除外. 可得

$$\sum_{l=1}^{m} l^{2s-1} C_{k,m,l} = b_s \qquad (s = 1, 2, \cdots, m), \tag{3}$$

其中

$$b_s = \begin{cases} 0 & s \neq k+1, \\ \dfrac{(2k+1)!}{2} & s = k+1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\rho_j(m) = \frac{-2h^{2m-2k}}{(2m+1)!} \sum_{l=1}^{m} l^{2m+1} C_{k,m,l} \left(\frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \right)_j + \cdots. \tag{5}$$

方程(3)的系数行列式为

$$D = V(1^2, 2^2, \cdots, m^2) \prod_{l=1}^{m} l, \tag{6}$$

其中 V 是由 $1^2, 2^2, \cdots, m^2$ 组成的 Vandermonde 行列式, 故 $D \neq 0$. 由式(2)～式(5)便得到精度为 $q = 2m - 2k$ 阶的逼近 $\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}$ 的数值微分公式. 特别地, 取 m 等于 $k+1, k+2$ 和 $k+3$, 便得各阶公式的系数表达式. 当 $m = k+1$ 时为

$$C_{k,m,l} = \frac{(2k+1)!}{2l \prod_{i=1, i \neq l}^{k+1} (l^2 - i^2)} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m), \tag{7}$$

当 $m = k+2$ 时为

$$C_{k,m,l} = \frac{-(2k+1)! \sum_{i=1, i \neq l}^{k+2} i^2}{2l \prod_{i=1, i \neq l}^{k+2} (l^2 - i^2)} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m), \tag{8}$$

当 $m = k+3$ 时为

$$C_{k,m,l} = \frac{(2k+1)! \sum_{i=1, i \neq l}^{k+3} \sum_{j=1, j \neq l}^{i} i^2 j^2}{2l \prod_{i=1, i \neq l}^{k+3} (l^2 - i^2)} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m). \tag{9}$$

它们的截断误差分别为 $O(h^2)$, $O(h^4)$ 和 $O(h^6)$.

在 x 方向应用式(7)～式(9)和周期性条件 $u_{N\pm j} = u_{\pm j}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ 把方程组(1)离散化, 得到近似的常微分方程组, 它在 x 方向的展开系数与精度分别与式(7)～(9)相同. 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{U}(t)}{dt} &= A\bar{U}(t), \\ \bar{U}(0) &= [\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N]^T, \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

其中 $\bar{U}(t) = [u_1, u_2, \cdots, u_N]^T$, $A = A_2, A_4, A_6$ 是由式(7)～(9)和周期条件组成的 $N \times N$ 阶循环方阵. 称下述形式的矩阵

$$[a_1, a_2, a_3] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

为 3×3 阶循环矩阵. 照此记法且当 $k = 1$ 时, 有

$$h^3 A_2 = a[0, -1, 0.5, 0, \cdots, 0, -0.5, 1]_{N \times N}, \tag{11}$$

$$h^3\boldsymbol{A}_4 = a[0, -1.625, 1, -0.125, 0, \cdots, 0, 0.125, -1, 1.625]_{N\times N}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} h^3\boldsymbol{A}_6 = {} & a[0, -2.0333, 1.4083, -0.3, 0.0292, 0, \cdots, 0, \\ & -0.0292, 0.3, -1.4083, 2.0333]_{N\times N}. \end{aligned} \tag{13}$$

为使用方便,列出当 $k=1\sim4, m=k+1, k+2, k+3$ 时,$\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$各阶公式的系数表达式 $C_{k,m,l}$,如表 1 所示. 若对 $2k+1$ 阶导数$\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$离散化时, 用精度 $q=2m-2k$ 阶的数值微分公式(2),则方程组(10)在 x 方向的精度为 $O(h^q)$. 方程组(10)的解[3]为 $\bar{U}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\bar{U}(0)$. 取 $t=t_n=n\tau, \tau=\Delta t$. 记 $\bar{U}^n=\bar{U}(t_n)$,可建立 2 层和 3 层显式格式为

$$\bar{U}^{n+1} = e^{\boldsymbol{A}(\tau)}\bar{U}^n, \tag{14}$$

$$e^Z = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{Z^l}{l!}, \tag{15}$$

$$\bar{U}^{n+1} = 2\mathrm{sh}(\boldsymbol{A}\tau)\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}, \tag{16}$$

$$\mathrm{sh}(Z) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{Z^{2l-1}}{(2l-1)!}. \tag{17}$$

在式(15)及式(17)的求和号中, 取至 $l=m$ 则分别得到在 t 方向精度为 $O(\tau^m)$ 和 $O(\tau^{2m})$ 的 2 层格式(14)和 3 层格式(16).

表 1　$\partial^{2k+1}u/\partial x^{2k+1}$的各阶公式系数表达式 $C_{k,m,l}$

k	m	l=1	2	3	4	5	6	7
1	2	−1.0000	0.5000					
	3	−1.6250	1.0000	−0.1250				
	4	−2.0333	1.4083	−0.3000	0.0292			
2	3	2.5000	−2.0000	0.5000				
	4	4.8333	−4.3333	1.5000	−0.1667			
	5	6.7292	−6.5000	2.7188	−0.5278	0.0451		
3	4	−7.0000	7.0000	−3.0000	0.5000			
	5	−15.7500	17.0000	−8.6250	2.1667	−0.2083		
	6	−24.2750	27.6563	−15.7292	5.0083	−0.8542	0.0646	
4	5	21.0000	−24.0000	13.5000	−4.0000	0.5000		
	6	54.0000	−65.2500	41.0000	−15.0000	3.0000	−0.2500	
	7	91.5375	−115.3000	78.5375	−33.2000	8.6875	−1.3000	0.0875

2　稳定性分析

显式格式(14),(16)的特征方程分别为

$$\mu = e^{\eta}, \tag{18}$$

$$\mu^2 - 2G\mu - 1 = 0, \tag{19}$$

其中 η 是 $\boldsymbol{A}\tau$ 的特征值, e^{η} 和 $G=\mathrm{sh}(\eta)$ 分别按式(15)及式(17)计算. 格式的稳定条件[4]为 $|\mu|\le1$ 且 $|\mu|=1$ 非重根. 对于式(19)当 G 为纯虚数时, 由 Miller 准则推出, 稳定条件为 $|G|<1$,

即

$$|\mathrm{sh}(\eta)| < 1. \tag{20}$$

容易求得$A\tau$的特征值η. 例如, $A_2\tau$的特征值为

$$\eta = \frac{a\tau}{2h^3}\xi = -\mathrm{i}8R\sin^3(\frac{n\pi}{N})\cos(\frac{n\pi}{N}) \equiv \mathrm{i}\lambda \qquad (n = 1, 2, \cdots, N). \tag{21}$$

同法, 可得$A_4\tau$, $A_6\tau$的特征值依次为

$$\eta \equiv \mathrm{i}\lambda = -\mathrm{i}8R(1 + \sin^2(\frac{n\pi}{N}))\sin^3(\frac{n\pi}{N})\cos(\frac{n\pi}{N}) \qquad (n = 1, 2, \cdots, N), \tag{22}$$

$$\eta \equiv \mathrm{i}\lambda = -\mathrm{i}8R(1 + \sin^2(\frac{n\pi}{N}) + \frac{14}{15}\sin^4(\frac{n\pi}{N}))\sin^3(\frac{n\pi}{N})\cos(\frac{n\pi}{N}) \qquad (n = 1, 2, \cdots, N). \tag{23}$$

类似地, 还可求出$k \geq 2$时的$A_k\tau$的特征值η, 且可写成η的一般表达式

$$\eta \equiv \mathrm{i}\lambda = 2\mathrm{i}R(C_1\sin\varphi + C_2\sin 2\varphi + \cdots + C_m\sin m\varphi). \tag{24}$$

在式(24)中, $C_l = C_{k,m,l}$的数值如表1所示, 对不同的k, l, m对应一组不同的系数值; $\varphi = \frac{n\pi}{N}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 下面推导格式的稳定条件. 当$k = 1$, $l = 1$时, 有两种情况. (1) 对2层格式, 由式(15)有: $m = 1$, $\mu = 1 + \mathrm{i}\lambda$, $|\mu|^2 = 1 + \lambda^2 > 1$, 恒不稳定; $m = 2$, $\mu = 1 + \mathrm{i}\lambda - \frac{\lambda^2}{2}$, $|\mu|^2 = 1 + \frac{1}{4}\lambda^2 > 1$, 恒不稳定; $m = 3$, $\mu = (1 - \frac{\lambda^2}{2}) + \mathrm{i}(\lambda - \frac{\lambda^3}{6})$, 由$|\mu|^2 \leq 1$得

$$\lambda^2 \leq 3; \tag{25}$$

$m = 4$, $\mu = (1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24}) + i(\lambda - \frac{\lambda^3}{6})$, 由$|\mu|^2 \leq 1$得

$$\lambda^2 \leq 8. \tag{26}$$

(2) 对3层格式, 由式(17)有: $m = 1$, $G = \mathrm{sh}(\eta) = \mathrm{i}\lambda$, 由$|G| \leq 1$推得

$$|\lambda| \leq 1; \tag{27}$$

$m = 2$, $G = \mathrm{i}(\lambda - \frac{\lambda^3}{6})$, 由$|G| \leq 1$推得[5]

$$|\lambda| \leq 2.847\,3. \tag{28}$$

一般地, 如果用TWLES(k, p, q)及TRLES(k, p, q), 分别表示逼近$2k+1$阶方程(1)(精度为$O(\tau^p + h^q)$)的2层与3层显式格式, 则对逼近$2k+1$阶方程(1)的格式$\bar{U}^{n+1} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\tau + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\tau)^2 + \frac{1}{6}(\boldsymbol{A}\tau)^3)\bar{U}^n$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_4$, 可表示为TWLES$(k, 3, 4)$. 而$\bar{U}^{n+1} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\tau + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\tau)^2 + \frac{1}{6}(\boldsymbol{A}\tau)^3 + \frac{1}{24}(\boldsymbol{A}\tau)^4)\bar{U}^n$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_q$, 可表示为TWLES$(k, 4, q)$. 而$\bar{U}^{n+1} = 2(\boldsymbol{A}\tau)\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2$, 可表示为TRLES$(k, 4, 2)$. 而$\bar{U}^{n+1} = 2((\boldsymbol{A}\tau) + \frac{1}{6}(\boldsymbol{A}\tau)^3\bar{U}^n - \bar{U}^{n-1}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_q$, 可表示为TRLES$(k, 4, q)$. 其余可依次类推.

将式(22)～(24)所定义的λ代入式(25)～式(28), 可算出诸格式的稳定条件. 它与2层的偏心格式(精度$O(\tau + h)$)的稳定条件$|R| \leq 1/2^{2k}$, 以及3层的蛙跳格式(精度$O(\tau^2 + h^2)$)的稳定条件$|R| \leq (\frac{k+1}{2k+1})^{2k+1} \triangleq R_0$相比较, 列表如表2所示.

表 2　差分格式稳定条件 $|R| \le R_0$

k	层数	格式名称	精度	R_0	偏心格式或蛙跳格式稳定条件
1	2	TWLES(1, 3, 2)	$O(\tau^3+h^2)$	0.666 667	0.25
		TWLES(1, 3, 4)	$O(\tau^3+h^4)$	0.375 819	
		TWLES(1, 3, 6)	$O(\tau^3+h^6)$	0.280 731	
		TWLES(1, 4, 2)	$O(\tau^4+h^2)$	1.088 662	
		TWLES(1, 4, 4)	$O(\tau^4+h^4)$	0.613 709	
		TWLES(1, 4, 6)	$O(\tau^4+h^6)$	0.458 432	
	3	TRLES(1, 2, 2)	$O(\tau^2+h^2)$	0.384 900	0.384 901
		TRLES(1, 2, 4)	$O(\tau^2+h^4)$	0.261 979	
		TRLES(1, 2, 6)	$O(\tau^2+h^6)$	0.162 080	
		TRLES(1, 4, 2)	$O(\tau^4+h^2)$	1.095 926	
		TRLES(1, 4, 4)	$O(\tau^4+h^4)$	0.617 804	
		TRLES(1, 4, 6)	$O(\tau^4+h^6)$	0.461 491	
2	2	TWLES(2, 3, 4)	$O(\tau^3+h^4)$	0.209 141	0.062 5
		TWLES(2, 3, 6)	$O(\tau^3+h^6)$	0.098 248	
		TWLES(2, 3, 8)	$O(\tau^3+h^8)$	0.065 379	
		TWLES(2, 4, 4)	$O(\tau^4+h^4)$	0.341 526	
		TWLES(2, 4, 6)	$O(\tau^4+h^6)$	0.160 438	
		TWLES(2, 4, 8)	$O(\tau^4+h^8)$	0.106 764	
	3	TRLES(2, 2, 4)	$O(\tau^2+h^4)$	0.120 748	0.120 747 67
		TRLES(2, 2, 6)	$O(\tau^2+h^6)$	0.056 723	
		TRLES(2, 2, 8)	$O(\tau^2+h^8)$	0.037 747	
		TRLES(2, 4, 4)	$O(\tau^4+h^4)$	0.343 805	
		TRLES(2, 4, 6)	$O(\tau^4+h^6)$	0.161 508	
		TRLES(2, 4, 8)	$O(\tau^4+h^8)$	0.107 477	
3	2	TWLES(3, 3, 6)	$O(\tau^3+h^6)$	0.061 118	0.015 625
		TWLES(3, 3, 8)	$O(\tau^3+h^8)$	0.024 967	
		TWLES(3, 3, 10)	$O(\tau^3+h^{10})$	0.015 250	
		TWLES(3, 4, 6)	$O(\tau^4+h^6)$	0.099 805	
		TWLES(3, 4, 8)	$O(\tau^4+h^8)$	0.040 771	
		TWLES(3, 4, 10)	$O(\tau^4+h^{10})$	0.024 903	
	3	TRLES(3, 2, 6)	$O(\tau^2+h^6)$	0.035 286	0.035 261 9
		TRLES(3, 2, 8)	$O(\tau^2+h^8)$	0.014 415	
		TRLES(3, 2, 10)	$O(\tau^2+h^{10})$	0.008 805	
		TRLES(3, 4, 6)	$O(\tau^4+h^6)$	0.100 471	
		TRLES(3, 4, 8)	$O(\tau^4+h^8)$	0.041 043	
		TRLES(3, 4, 10)	$O(\tau^4+h^{10})$	0.025 069	
4	2	TWLES(4, 3, 8)	$O(\tau^3+h^8)$	0.017 588	$3.906\ 25\times10^{-3}$
		TWLES(4, 3, 10)	$O(\tau^3+h^{10})$	0.006 112	
		TWLES(4, 3, 12)	$O(\tau^3+h^{12})$	0.003 341	
		TWLES(4, 4, 8)	$O(\tau^4+h^8)$	0.028 721	
		TWLES(4, 4, 10)	$O(\tau^4+h^{10})$	0.009 981	
		TWLES(4, 4, 12)	$O(\tau^4+h^{12})$	0.005 456	
	3	TRLES(4, 2, 8)	$O(\tau^2+h^8)$	0.010 154	$9.919\ 87\times10^{-3}$
		TRLES(4, 2, 10)	$O(\tau^2+h^{10})$	0.003 529	
		TRLES(4, 2, 12)	$O(\tau^2+h^{12})$	0.001 929	
		TRLES(4, 4, 8)	$O(\tau^4+h^8)$	0.028 912	
		TRLES(4, 4, 10)	$O(\tau^4+h^{10})$	0.010 048	
		TRLES(4, 4, 12)	$O(\tau^4+h^{12})$	0.005 492	

通过表2, 可以说明以下3种情况. (1) 当方程阶数 $2k+1$ 确定时, 文中所构造的显式格式在空间方向提高精度会缩小稳定性区域, 而在时间方向提高精度时稳定性区域会扩大. (2) 当方程阶数 $2k+1$ 增加时, 稳定性区域会缩小. 尽管如此, 这些格式的精度均优于偏心格式及蛙跳格式; 且其稳定性条件大多数也相应地优于2层的偏心格式及3层的蛙跳格式. (3) 当 $k=1$ 时, 方程(1)即为色散方程, 文[2]对色散方程的结论也是本文的特例. 其稳定性条件最好的是 TWLES(1, 4, 2) 及 TRLES(1, 4, 2), 其稳定性条件分别为 1.088 662 及 1.095 926, 均超过1.

3 数值例子

考虑 $k=2$ 时的方程(1), 即五阶演化方程的周期边值问题为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \qquad (0<x<\pi, 0<t\leq T),\\ &u(x,0)=\cos x,\\ &u(x+2\pi,t)=u(x,t),\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

其精确解为 $u^*(x,t)=\cos(x+at)$.

用本文格式($k=2$)计算数值解时, 初值用精确解进行计算, 边值用周期条件计算. 取 $a=4$, $h=\pi/20$, 按格式 TWLES(2, 4, q)($q=4,6,8$), TRLES(2, 4, q)($q=4,6,8$) 并取 $R=R_0(q)$ 进行计算. 表3, 4分别列出误差 $E=u^*(x,t)-u_j^n$ 的部分数值表, 其中 u_j^n 表示按上述格式算出的

表3 格式 TWLES(2, 4, q)($q=4,6,8$), $R=R_0(q)$ 数值误差表

格式	j	n			
		2	202	402	602
TWLES(2,4,4)		-9.199×10^{-5}	-9.292×10^{-3}	-1.849×10^{-2}	-2.769×10^{-2}
TWLES(2,4,6)	5	-7.888×10^{-5}	-7.987×10^{-3}	-1.593×10^{-2}	-2.392×10^{-2}
TWLES(2,4,8)		-2.505×10^{-5}	-2.530×10^{-3}	-5.034×10^{-3}	-7.536×10^{-3}
TWLES(2,4,4)		-9.199×10^{-5}	-9.292×10^{-3}	-1.849×10^{-2}	-2.769×10^{-2}
TWLES(2,4,6)	15	-7.887×10^{-5}	-7.946×10^{-3}	-1.577×10^{-2}	-2.356×10^{-2}
TWLES(2,4,8)		-2.505×10^{-5}	-2.531×10^{-3}	-5.039×10^{-3}	-7.548×10^{-3}

表4 格式 TRLES(2, 4, q)($q=4,6,8$), $R=R_0(q)$ 数值误差表

格式	j	n			
		2	202	402	602
TRLES(2, 4, 4)		-9.261×10^{-5}	-9.353×10^{-3}	-1.861×10^{-2}	-2.787×10^{-2}
TRLES(2, 4, 6)	5	-7.940×10^{-5}	-8.040×10^{-3}	-1.604×10^{-2}	-2.408×10^{-2}
TRLES(2, 4, 8)		-2.522×10^{-5}	-2.547×10^{-3}	-5.067×10^{-3}	-7.586×10^{-3}
TRLES(2, 4, 4)		-9.261×10^{-5}	-9.354×10^{-3}	-1.861×10^{-2}	-2.787×10^{-2}
TRLES(2, 4, 6)	15	-7.940×10^{-5}	-7.999×10^{-3}	-1.587×10^{-2}	-2.371×10^{-2}
TRLES(2, 4, 8)		-2.522×10^{-5}	-2.548×10^{-3}	-5.073×10^{-3}	-7.599×10^{-3}

差分解, 而 $u^*(x_j, t_n)$ 为在点(x_j, t_n)的精确解. 数值结果表明: 当按格式 TWLES(2, 4, q) 及 TRLES(2, 4, q)($q=4, 6, 8$) 的稳定条件 $R=R_0(q)$ 进行计算时, 数值结果稳定; 而对格式 TWLES(2, 4, 4), 若取 $R=0.35>R_0=0.341\ 526$ 计算至 $n=402$ 层时已上溢, 数值不稳定. 由此表明, 上述所作的稳定性分析是正确的.

最后指出, 表 3, 表 4 中同一层 n 下的数据并不代表同一 t 值下的数据. 因 $t=t_n$, $\tau=R_0h^5/a$, 格式不同, R_0 也不相同. 从定性看, 在同一层 n 下比较精度也足够了.

程少珠, 魏大春同志协助上机算题, 提供计算数据, 特此致谢.

参　考　文　献

1 秦孟兆. 一类演化方程 $u_t=\alpha u^q u_1+au_p$ 的差分格式[J]. 科学通报, 1982, 27(5): 261～263

2 黎　益, 廖晓峰. 色散方程的任意阶精度的显式差分格式[J]. 四川大学学报(自然科学版), 1993, 30(4): 442～447

3 Lancaster P, Tisemestsky M. The theory of matrices[M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1985. 334～337

4 Richtmyer R D, Maorton K W. Difference methods for initial-value problems[M]. 2nd ed. New York: John wiley and son's, 1967. 35～153

5 秦孟兆. 波动方程两种哈密顿型蛙跳格式[J]. 计算数学, 1988, 10(3): 272～281

Explicit Difference Schemes of Higher Evolution Equation with Accuracy of Arbitrary Order

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A discussion is devoted to two-level and three-level explicit difference schemes of higher evolution equation $\partial u/\partial t=a\partial^{2k+1}u/\partial x^{2k+1}$, where $a\neq 0$ is real constant and $k=1,2,3,\cdots$. In addition to the accuracy $O(\tau+h)$ and $O(\tau+h^2)$ of known schemes, a class of explicit schemes with accuracy of arbitrary order $O(\tau^p+h^q)(p,q=1,2,\cdots)$ are given by using semi-discrete method. From the discussion on the cases of two-level scheme $p=3,4$, $q=2k$, $2(k+1)$, $2(k+2)$ and three-level scheme $p=2,4$, $q=2k$, $2(k+1)$, $2(k+2)$ $(k=1,2,3,4)$, the stability conditions of these schemes are derived. These conditions are better than those of similar schemes in reference (2). The author's results involve the results in reference (3).

Keywords　higher evolution equation, explicit difference scheme with high accuracy, stability analysis