

# 各向异性磁介质中载流圆线圈的磁场<sup>\*</sup>

王建成 李 强 苏武浔

(华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

**摘要** 在  $\mu_{11} = \mu_{33}$  条件下的线性各向异性磁介质中, 已可求出载流圆线圈轴线上的磁场, 以及其它电流所激发的磁场, 但其适用范围受到一定限制. 文中在已给出的各向异性磁介质中毕奥-萨伐尔定律笛卡儿坐标形式的基础上, 求出  $\mu_{11} = \mu_{33}$  的更一般情况下的各向异性磁介质中载流圆线圈轴线上的磁场, 得到适用范围更广的计算结果. 为求解一般情况的各向异性磁介质中电流的磁场提供了范例. 在此基础上, 可进一步求解一般各向异性磁介质中, 载流直螺线管所激发的磁场.

**关键词** 磁场, 各向异性, 圆线圈

**分类号** TM 154.1

文 [1] 导出在线性各向异性磁介质中的毕奥-萨伐尔定律的笛卡儿坐标形式, 文 [2] 进一步将该定律推广到极坐标形式. 文 [1] 不仅计算了在一般的各向异性磁介质中带电直导线的磁场分布, 而且还计算了在  $\mu_{11} = \mu_{33}$  情况下, 线性各向异性磁介中载流圆线圈轴线上和载流直螺线管内部的磁场, 以及充满各向异性磁介质的无限长直螺线管的自感系数. 它为研究各向异性电磁学提供了一个新途径, 对于深入理解该定律求解各向异性电磁场的功能起到重要的作用. 为了能够更加深入地理解线性各向异性磁介质中的毕奥-萨伐尔定律, 本文研究了在  $\mu_{11} = \mu_{33}$  的更一般情况下, 各向异性磁介质中电流分布的磁场问题, 并计算出在一般各向异性磁介质中, 载流圆线圈轴线上所激发的磁场. 所得的结果更具普遍性, 适应范围更广. 在所得结果的基础上, 可进一步求出一般各向异性磁介质中载流直螺线管内部的磁场, 这将另文表述. 同时, 本文求出的各向异性磁介质中载流导体所激发的磁场, 还为工程中定量估计介质的各向异性对电流分布产生的磁场的影响, 提供了理论依据.

## 1 各向异性磁介质中的毕奥-萨伐尔定律

当线性各向异性磁介质的三个主轴分别与直角坐标系的  $x, y, z$  三个轴平行时, 此各向异性磁介质中的磁场具有的形式 [1, 3~5] 为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}} dV. \quad (1)$$

若用  $I$  表示电流, 当电流为线分布时式(1)式可写成

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}}, \quad (2)$$

式中

$$\mu\mu = \frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{R} = R_1\mathbf{e}_1 + R_2\mathbf{e}_2 + R_3\mathbf{e}_3 = (x - x_0)\mathbf{e}_1 + (y - y_0)\mathbf{e}_2 + (z - z_0)\mathbf{e}_3,$$

$(x, y, z)$  为场点坐标,  $(x_0, y_0, z_0)$  为源点坐标.

## 2 载流圆线圈轴线上的磁场

设有半径为  $a$  的圆线圈, 通有电流  $I$ , 置于  $XOZ$  平面内, 其中心与坐标原点重合, 而且使各向异性磁介质的三个主轴分别与直角坐标系的三个坐标轴平行. 求轴线上距离圆心为  $y$  的  $P$  点的磁场, 如图 1 所示. 由图可知, 圆上任一电流元  $I\mathrm{d}l$  与此电流元到  $P$  点的矢径  $\mathbf{R}$  之间的夹角为  $90^\circ$ ; 因而有

$$I\mathrm{d}l \times \mathbf{R} = IR\mathrm{d}l \cos\beta \sin\theta \mathbf{e}_1 +$$

$$IR\mathrm{d}l \sin\beta \mathbf{e}_2 + IR\mathrm{d}l \cos\beta \cos\theta \mathbf{e}_3.$$

所以,  $P$  点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu\mu}{4\pi} \cdot \left[ \begin{aligned} &+ \mathbf{e}_1 \frac{IR \cos\beta \sin\theta \mathrm{d}l}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}} + \\ &\mathbf{e}_2 \frac{IR \sin\beta \mathrm{d}l}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}} \\ &+ \mathbf{e}_3 \frac{IR \cos\beta \cos\theta \mathrm{d}l}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}} \end{aligned} \right].$$

由于问题的对称性, 式(3)中的第一项积分和第三项积分在积分过程中相互抵消, 结果为零. 因此

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(y) &= \frac{\mu\mu}{4\pi} \cdot \mathbf{e}_2 \frac{IR \sin\beta \mathrm{d}l}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{IR \sin\beta \mathrm{d}l}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

由图中的几何关系可知

$$R \sin\beta = a, \quad R_1 = -a \sin\theta, \quad R_2 = y, \quad R_3 = -a \cos\theta.$$

式(4)可进一步变换为对角度  $\theta$  的积分, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(y) &= \frac{Ia^2}{4\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a^2 \sin^2\theta/\mu_{11} + y^2/\mu_{22} + a^2 \cos^2\theta/\mu_{33})^{3/2}} \mathbf{e}_2 = \\ &= \frac{Ia^2}{4\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33} + (a^2/\mu_{11} - a^2/\mu_{33}) \sin^2\theta)^{3/2}} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

若令

$$c = y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{33}, \quad d = y^2/\mu_{11} - a^2/\mu_{33}, \quad (6)$$

则有 © 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

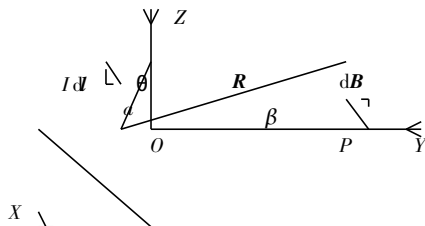


图1 位于 $XOY$ 平面内的截流圆线圈

$$B(y) = \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(c + d\sin^2\theta)^{3/2}} + \frac{\pi}{\pi^2} \frac{d\theta}{(c + d\sin^2\theta)^{3/2}} \right]. \quad (7)$$

令  $u = \frac{\sqrt{c^2 + cd}}{c} \operatorname{tg}\theta$ , 则有  $d\theta = \frac{c}{c^2 + cd + c^2u^2} du$ ,  $\sin^2\theta = \frac{c^2u^2}{c^2 + cd + c^2u^2}$ . 代入式(7)得

$$\begin{aligned} B(y) &= \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{c}{c^2 + cd + c^2u^2} \right) \left\| \left( c + \frac{dc^2u^2}{c^2 + cd + c^2u^2} \right)^{3/2} du + \right. \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{c}{c^2 + cd + c^2u^2} \right) \left\| \left( c + \frac{dc^2u^2}{c^2 + cd + c^2u^2} \right)^{3/2} du \right] = \\ &= \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( c - \frac{c^2 + cd}{c^2 + cd + c^2u^2} \right) / (c^3 + c^2d + c^3u + dc^2u^2)^{3/2} du + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( c - \frac{c^2 + cd}{c^2 + cd + c^2u^2} \right) / (c^3 + c^2d + c^3u + dc^2u^2)^{3/2} du \right] = \\ &= \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{c}{(c^3 + c^2d)^{3/2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 + cd + c^2u^2}{(1 + u^2)^{3/2}} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 + cd + c^2u^2}{(1 + u^2)^{3/2}} du \right] = \\ &= \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{c}{(c^3 + c^2d)^{3/2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 + cd + c^2u^2}{(1 + u^2)^{3/2}} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 + cd + c^2u^2}{(1 + u^2)^{3/2}} du \right]. \end{aligned}$$

再令  $u = \operatorname{tg}\alpha$ , 则有  $du = \sec^2\alpha d\alpha$ ,  $1 + u^2 = \sec^2\alpha$ . 所以

$$\begin{aligned} B(y) &= \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{c}{(c^3 + c^2d)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{c^2 \sec^2\alpha + cd}{\sec\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{2}{c^3 + c^2d} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{cd}{c^2 + cd} \sin^2\alpha \right) d\alpha. \quad (8) \end{aligned}$$

令  $K^2 = \frac{d}{c+d}$ , 则  $B(y) = \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{2}{c^3 + c^2d} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - K^2 \sin^2\alpha \right) d\alpha$ . 查椭圆积分表, 得  $B(y) = \frac{Ia^2}{2\pi} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{2}{c^3 + c^2d} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 K^2 - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{K^4}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{K^6}{5} - \dots \right] \right\}$ . 所以, 载流圆线圈轴线上一点的磁场为

$$\begin{aligned} B(y) &= \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}} \frac{Ia^2}{2} \frac{1}{c^3 + c^2d} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 K^2 - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{K^4}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{K^6}{5} - \dots \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

下面讨论两种特殊情况.

(1) 当  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$  时 (即介质为各向同性时),  $c = (y^2 + a^2)/\mu$ ,  $d = 0$ ,  $K = 0$ . 由式(10)得

$$B(y) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{IS}{(y^2 + a^2)^{3/2}}.$$

当  $y = 0$  时, 圆心处的磁场为

显然,这都是大家公认的结果.

(2) 当介质为  $\mu_{11} = \mu_{33}$  的各向异性时,  $c = y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11}$ ,  $d = 0$ ,  $K = 0$ . 由式(10)得

$$B(y) = \frac{I a^2 \mu_{22}}{2 \mu_{11} (y^2/\mu_{22} + a^2/\mu_{11})^{3/2}}.$$

这与直接由式(4)计算出的结果完全吻合,进一步验证式(10)的正确性. 另外,在这种特殊各向异性介质中可以给出亥姆霍兹线圈的条件<sup>[1]</sup>.

## 参 考 文 献

- 1 王建成,陈癯年. 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(2): 125 ~ 132
- 2 王建成,陈癯年. 各向异性磁介质毕奥-萨伐尔定律极坐标形式. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 354 ~ 357
- 3 陈癯年,陈思明,王建成. 从麦克期韦方程组建立的新电路理论. 北京: 中国科学出版社, 1999, 264 ~ 301
- 4 陈癯年,何煜光. 非线性网络与线性网络统一的场论说. 中国科学(A 辑), 1994, 24(12): 1316 ~ 1326
- 5 陈癯年,王建成. 各向异性磁矢势  $\vec{A}$  的微分方程及其解. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(1): 90 ~ 97

## Magnetic Field of Current-Carrying Circular Coil in Anisotropic Magnetic Medium

Wang Jiancheng Li Qiang Su Wuxun

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ. 362011, Quanzhou)

**Abstract** Under the condition of  $\mu_{11} = \mu_{33}$ , the magnetic field on the axis of current-carrying circular coil in linear anisotropic magnetic medium and the magnetic field excited by other current can be solved already. However, it was limited in applicability. Starting from Cartesian coordinate form of Biot-Savart law in anisotropic magnetic medium given already, the authors solve the magnetic field on the axis of current-carrying circular coil under even more general condition of  $\mu_{11} = \mu_{33}$ . They obtain calculating results of wider applicability and thus offer an example for solving magnetic field of current in anisotropic magnetic medium under general condition. Based on the present work, the magnetic field excited by current-carrying solenoid in general anisotropic magnetic medium can be further solved.

**Keywords** magnetic field, anisotropy, circular coil