

上部结构-基础-地基共同工作数值解法^{*}

张 翼

(泉州鲤城建筑设计院, 泉州 362000)

摘要 采用结构杆系有限元、基础梁有限元和地基无穷边界元, 三者联合求解上部结构-基础-地基的共同工作问题. 提出杆系有限元与基础梁有限元、基础梁有限元与地基无穷边界元的耦合方法. 通过实例计算, 分析结构-基础-地基的相互关系与共同工作机理. 计算结果表明, 文中所提出方法的精确性和有效性, 同时说明在工程实际中考虑三者共同工作的可行性与必要性.

关键词 结构, 地基, 基础, 共同作用, 有限元, 边界元

分类号 TU 311. 41; TU 470⁺. 3

结构-基础-地基的共同工作计算, 一直被视为一个十分复杂的研究课题. 至今, 人们尚无法用精确的数学表达式来全面反映其共同工作的内在规律, 只能借助各种简化方法或数值解法^[1, 2]. 本文利用无穷边界单元^[3]模拟地基, 梁的有限单元模拟基础和杆系有限元模拟上部框架结构. 建立地基和基础接触面上广义力平衡和广义位移协调方程, 有效地解决了结构、基础和地基的相互作用问题.

1 数值方法

1.1 基础和上部结构的有限单元法

考虑上部结构为高层建筑结构中常见的框架体系, 由于基础的几何尺寸远小于上部结构和地基的几何尺寸, 因此可视其为置于半无限地基并连结上部框架结构的基础梁体系. 对框架和基础梁采用梁单元, 可获得基础和上部结构系统结点广义位移和结点广义力的关系为

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bf} \\ K_{fb} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b \\ F_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_b \\ O \end{bmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \Omega_+ \cup \Omega_b. \quad (1)$$

其中 K_{bb} , K_{ff} 分别为对应基础和框架的分块刚度子阵; K_{bf} , K_{fb} 是基础和框架的耦合矩阵; $\delta = [U, V, \theta]^T$ 为节点广义位移矢量; $F = [N, Q, M]^T$ 为已知节点力和等效节点力矢量; R_b 为地基对基础反作用力的等效广义节点力矢量; Ω_+ , Ω_b 分别为上部结构和基础各结点座标之集合.

1.2 模拟地基的无穷边界单元法

假定建筑物在长度方向较大, 对上部结构连同基础采用平面框架-基础梁体系, 则地基可视为半无限弹性平面问题. 它满足弹性力学 Navier 方程, 即

$$\mu u_{j,kk} + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{k,kj} + f_j = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega_i, \quad (2)$$

其中 μ, ν 分别为剪切模量和泊松比, u 为位移向量. 忽略体力 f_j , 考虑半无限地基的不规则, 则采用文献 [5] 所建立的平面任意形状弹性地基无穷边界元法的边界积分方程为

$$C_{ki} V_i(p) + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} P_{ki}^*(p, Q) V_i(Q) ds + C_{kii} u_i = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} u_{ki}^*(p, Q) t_i(Q) ds, \quad (3)$$

式中 u_{ki}^*, P_{ki}^* 为 Kelvin 基本解, u_{oi} 为刚体平动位移, Γ_1 为有限边界.

$$C_{ki} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} A+B & \sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1 \\ \sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1 & A-B \end{bmatrix},$$

式中 $A = 2(1-\nu)(\theta_2 - \theta_1)$, $B = \frac{1}{2}(\sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1)$. 此式应用于半无限平面域问题, 这时 $\theta_2 =$

$\frac{\pi}{2}$, Γ_2 和 Γ_3 成了趋于左右无穷远处的无限边界. 通过离散式 (3), 对有限边界 Γ_1 和无限边界 Γ_2, Γ_3 进行单元划分和积分处理, 同样可按一般边界元法获得边界元线性方程组. 为了减少单元的剖分, 较精确地获得 Γ_2, Γ_3 趋于左右无穷远的积分, 必须引入无穷单元. 由文 [3]

给出的插值函数, 可以在适当的地方布置无穷边界元, 计算出 $\int_{\Gamma_2} p_{ij}^* u_j ds$, $\int_{\Gamma_3} p_{ij}^* u_j ds$, $\int_{\Gamma_2} u_{ij}^* t_j ds$ 和

$\int_{\Gamma_3} u_{ij}^* t_j ds$, 而在其余有限的边界上采用常规的线性边界元法建立 H, G 矩阵, 最后组装成为

$$Hu = GT, \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3. \quad (4)$$

2 上部结构-基础-地基的耦合

根据上面得到的基础-结构有限单元法线性方程组 (1) 和地基无穷边界元方程 (4), 可利用基础和地基接触面上的内力平衡和位移协调关系导出总体耦合方程. 由于基础采用梁单元, 其涉及到的是单元节点的广义力 $[N, Q, M]^T$ 和广义位移 $[U, V, \theta]^T$, 而地基边界元涉及到的是边界上的分布力. 因此, 必须导出基础梁等效节点力和地基边界分布力之间的关系. 当地基边界 Γ_1 划分为线性边界元时, 式 (1) 中基础梁单元的等效节点荷载 $\{R_b\}$, 就是基础梁在地基反力作用下产生的固端力和固端力矩 (图 1). 因此, 不难导出第 i 个基础梁单元线性分布荷载的等效节点力为

$$\{R\}_i = \begin{bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & 0 & 0 & \frac{l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7l}{20} & -\frac{l^2}{20} & 0 & \frac{3l}{20} & \frac{l^2}{30} \\ \frac{l}{6} & 0 & 0 & \frac{l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3l}{20} & -\frac{l^2}{30} & 0 & \frac{7l}{20} & \frac{l^2}{20} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \\ T_{x2} \\ T_{y2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

在总体坐标下组装各单元的 $\{R_b\}_i$ 可得

把式(4)写成分块矩阵形式为

$$\mathbf{H}^d \mathbf{H}_s^d \begin{bmatrix} u_1^d \\ u_s^d \end{bmatrix} = \mathbf{G}^d \mathbf{G}_s^d \begin{bmatrix} T_1^d \\ T_s^d \end{bmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \Gamma^d, \quad (7)$$

其中下标 1 对应和基础梁接触的边界 Γ_1 上的量, s 对应其余边界上的量. 引入 Γ_1 上力平衡和位移协调条件, $(u, v)_{\Gamma_1}^d = (u, v)_{\Gamma_1}^b = (u, v)_{\Gamma_1}$, $(T_x, T_y)_{\Gamma_1}^d = -(T_x, T_y)_{\Gamma_1}^b = (T_x, T_y)_{\Gamma_1}$. 式(1), (7) 合并后可得结构-基础-地基的总体耦合方程组为

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bf} & O & M \\ K_{fb} & K_{ff} & O & O \\ H_1^d & O & H_s^d & -G^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_f \\ U_s \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b \\ F_f \\ G_s T_s \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中 H_1^d 是对应 δ_b 中的转角项而增加了零元素列的 H_1^d 的扩充子块. 该方程组是封闭的.

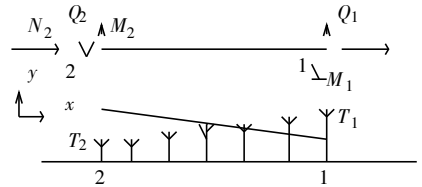


图1 边界元分布力与有限元节点力

3 结构-基础-地基的共同工作算例

根据上述的分析编制了计算机程序, 计算了图 2 所示的两跨框架结构. 基础为片筏基础, 地基为线弹性体, 泊松比 $\nu = 0.48$. 本文分别就不同的基础刚度 (J_b)、不同的地基土特性 (E_d) 和不同的结构刚度 (J_f), 探讨了三者共同工作的机理.

3.1 不同基础刚度的影响

考察上部结构 ($J_f = 2.364 \times 10^{-3} \text{ m}^4$) 置于三种不同刚度基础的情况, 地基弹模 $E_d = 2.394 \text{ MPa}$, 结构和基础 $E = 2.067 \times 10^4 \text{ MPa}$. 在相同荷载条

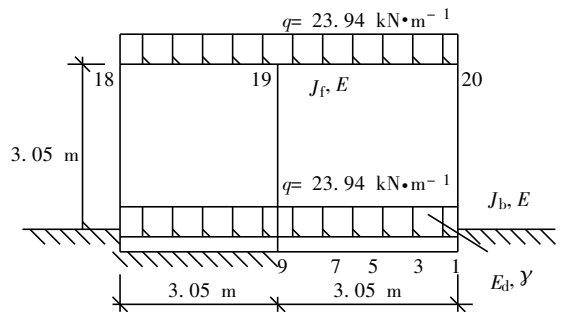


图2 两跨框架-基础-地基

件下, 表 1 给出了基础内力、相对挠曲 ($V - V_9$)、地基反力 (R) 和上部结构内力. 结果表明, 基础弯矩 (M) 随其刚度的增大而增大, 而相对挠曲却随此而减小. 由于上部框架与基础是密切相联, 相互制约的, 它的内力除了由外荷载引起的之外, 还包含了基础差异沉降所引起的次应力, 从而导致结构部分杆件内力随着基础刚度减少而明显增大. 因此在实际工程中, 基础方案的选定需作整体综合考虑. 即对差异沉降不敏感的上部结构, 基础宜柔不宜刚; 置于高压缩性地基上对不均匀沉降为敏感的上部结构, 基础刚度宜刚不宜柔.

表 2 给出了本文方法同文献^[6]有限元解及不考虑共同作用的上部结构的弯矩之比较. 不难看出, 本文的解和 King 的有限元解还是比较吻合的. 另外, 考虑相互作用和不考虑相互作用的结果有显著差异. 因此, 在工程实际中考虑三者的共同作用是完全必要的.

3.2 不同地基土特性的影响

共同作用的分析结果与地基土软硬程度有关. 以不变的结构刚度 $J_f = 2.364 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ 和基础刚度 $J_b = 1.8916 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ 为例, 选用三种不同的地基参数进行分析. 表 3 给出了基础的弯矩, 相对挠曲和结构的内力 (N 为轴力). 从表中结果可见, 随着地基土变硬, 荷载引起的

相对挠曲变小,基础内力相应减少.反之,当地基土变软,基础内力和差异沉降均相应增大,其结果导致上部结构内力的重分布.边柱荷载随 E_d 值增大而加载,而内柱却为卸载,结构弯矩随 E_d 变小而分布较为均匀.这说明结构、基础和地基之间相互制约、相互影响的作用在较软

表 1 不同基础刚度的基础内力、沉降差和结构内力值

J_b/m^4	点号坐标/m	$M/\text{kN}\cdot\text{m}$	R/kN	$(V-V_0)/\text{mm}$
2.9265×10^{-4}	9($x=0.0,y=0.0$)	-18.1887	35.6168	0.00
	7($x=0.8,y=0.0$)	-1.9374	34.8831	6.462×10^{-4}
	5($x=1.6,y=0.0$)	7.0831	37.2948	1.560×10^{-3}
	3($x=2.4,y=0.0$)	6.9133	51.3769	1.804×10^{-3}
	1($x=3.0,y=0.0$)	2.9275	202.5251	1.523×10^{-3}
	19($x=3.0,y=3.0$)	-9.1845		
	20($x=0.0,y=3.0$)	-26.3538		
1.0007×10^{-3}	9($x=0.0,y=0.0$)	-26.1860	32.2407	0.00
	7($x=0.8,y=0.0$)	-5.5516	34.6195	2.934×10^{-4}
	5($x=1.6,y=0.0$)	8.1106	37.9928	7.757×10^{-4}
	3($x=2.4,y=0.0$)	12.2065	51.8495	1.031×10^{-3}
	1($x=3.0,y=0.0$)	4.6339	201.5905	9.382×10^{-4}
	19($x=3.0,y=3.0$)	1.6062		
	20($x=0.0,y=3.0$)	-21.5924		
1.8915×10^{-2}	9($x=0.0,y=0.0$)	-45.8021	33.2129	0.00
	7($x=0.8,y=0.0$)	-18.2548	34.2996	5.545×10^{-5}
	5($x=1.6,y=0.0$)	2.5176	38.5057	1.416×10^{-4}
	3($x=2.4,y=0.0$)	13.4842	52.7014	2.254×10^{-4}
	1($x=3.0,y=0.0$)	8.3975	202.8016	2.782×10^{-4}
	19($x=3.0,y=3.0$)	18.1924		
	20($x=0.0,y=3.0$)	-12.9918		

表 2 上部结构节点弯矩对比

基础变化	$M_{1-20}/\text{kN}\cdot\text{m}$		$M_{19-20}/\text{kN}\cdot\text{m}$		$M_{20-1}/\text{kN}\cdot\text{m}$	
	本 文	文 [3]	本 文	文 [3]	本 文	文 [4]
$J_b=1.8915\times10^{-3}\text{m}^4$	-8.3975	-8.52	18.1924	18.87	-12.9918	-12.76
不考虑共同作用	-4.7114		22.6972		-9.5799	

表 3 不同地基刚度的基础内力、沉降差和结构内力值

E_d/MPa	点号坐标	$M/\text{kN}\cdot\text{m}$	$(V-V_0)/\text{mm}$	N/kN
2.3940	9($x=0.0,y=0.0$)	-45.0821	0.00	
	7($x=0.8,y=0.0$)	-26.0553	5.034×10^{-5}	
	5($x=1.6,y=0.0$)	2.5276	1.416×10^{-4}	
	3($x=2.4,y=0.0$)	9.2657	2.456×10^{-4}	
	1($x=3.0,y=0.0$)	8.3975	2.782×10^{-4}	
	19-1($x=3.0,y=0.0$)	18.1924		-76.4456
	20-9($x=0.0,y=0.0$)	-12.9918		-34.8179

续表

E_d/MPa	点号坐标	$M/\text{kN} \cdot \text{m}$	$(V - V_9)/\text{mm}$	N/kN
$2.394\ 0 \times 10^1$	9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 44.447 9	0.00	
	7($x = 0.8, y = 0.0$)	17.123 2	2.817×10^{-5}	
	5($x = 1.6, y = 0.0$)	2.990 3	8.538×10^{-5}	
	3($x = 2.4, y = 0.0$)	13.388 8	1.389×10^{-4}	
	1($x = 3.0, y = 0.0$)	8.017 0	1.680×10^{-4}	
	19- 1($x = 3.0, y = 0.0$)	18.466 2		- 76.353 2
	20- 9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 12.767 4		- 34.634 8
$2.394\ 0 \times 10^2$	9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 35.725 3	0.00	
	7($x = 0.8, y = 0.0$)	- 10.007 9	2.146×10^{-5}	
	5($x = 1.6, y = 0.0$)	5.749 5	6.068×10^{-5}	
	3($x = 2.4, y = 0.0$)	12.402 1	9.166×10^{-5}	
	1($x = 3.0, y = 0.0$)	6.075 3	1.031×10^{-4}	
	19- 1($x = 3.0, y = 0.0$)	20.193 6		- 78.817 6
	20- 9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 11.347 7		- 33.608 7

的地基上比较硬的地基上能得到更好的发挥。因此,考虑其共同工作就更具重要意义。

3.3 上部结构刚度的影响

在一定的地基($E_d = 2.394\ \text{MPa}$),基础($J_b = 1.891\ 5 \times 10^{-2}\ \text{m}^4$)和外载不变的条件下,选用三种不同的上部结构刚度进行分析。计算结果列于表 4。由表中结果可见,增加上部结构的刚度会使基础沉降差和内力减小,同时也将导致上部结构中部内力减小而端部内力增大。因此,在上部刚度参与作用导致基础内力减少的同时,上部结构本身内力的增大是不变忽视的。

表 4 不同结构刚度的基础内力、沉降差和结构内力值

J_f/m^4	点号坐标	$M/\text{kN} \cdot \text{m}$	$(V - V_9)/\text{mm}$	N/kN
$2.955\ 0 \times 10^{-4}$	9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 55.432 5	0.00	
	5($x = 1.6, y = 0.0$)	- 3.619 5	1.446×10^{-4}	
	1($x = 3.0, y = 0.0$)	5.571 4	3.186×10^{-4}	
	19- 1($x = 3.0, y = 0.0$)	22.186 7		- 80.972 8
	20- 9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 10.063 4		- 32.551 6
$2.364\ 0 \times 10^{-3}$	9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 45.082 1	0.00	
	5($x = 1.6, y = 0.0$)	2.527 6	1.416×10^{-4}	
	1($x = 3.0, y = 0.0$)	8.397 5	2.782×10^{-4}	
	19- 1($x = 3.0, y = 0.0$)	18.192 4		- 76.445 6
	20- 9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 12.991 8		- 34.817 9
$7.978\ 0 \times 10^{-3}$	9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 37.494 9	0.00	
	5($x = 1.6, y = 0.0$)	6.685 0	5.706×10^{-5}	
	1($x = 3.0, y = 0.0$)	8.769 8	9.247×10^{-5}	
	19- 1($x = 3.0, y = 0.0$)	13.294 0		- 71.294 7
	20- 9($x = 0.0, y = 0.0$)	- 15.949 7		- 37.376 9

4 结束语

上部结构、基础和地基共同作用分析是一个十分复杂的课题。基础的刚度、地基土的特性和上部结构的刚度对共同作用结果都产生较大的影响。文中采用上部结构—基础的有限单元法和地基的无穷边界单元法联合求解,研究了三者共同工作的机理,得到了较为满意的结果。此外,本文的无穷边界元法是基于任意形状无限平面域的积分方程基础上建立的,可方便求解不规则的地基问题。例如,埋深结构和基础梁—地基的共同作用及斜坡上基础和结构相互作用的问题。由于采用统一的 Kelvin 基本解,使得和其它域内边界元问题进行耦合。其编程方便,适应性强,并且有较好的精度。因此,本文为研究结构—基础—地基共同作用提供了一个有效的数值解法。

参 考 文 献

- 1 Cheung Y K, Zienkiewicz O C. Plates and tanks on elastic foundations. *Int. J. of Solids and Stru.*, 1965, 1: 451 ~ 461
- 2 王履爽, 麦淑良, 施景勋. 弹性地基上弹性地基梁基础的边界单元分析法. *华侨大学学报(自然科学版)*, 1989, 10(2): 161 ~ 170
- 3 林建华, 施景勋. 任意形状弹性地基问题的无穷边界单元法. *岩土工程学报*, 1993, 15(6): 44 ~ 52
- 4 King G J W, Chandrasekaran V S. An assessment of the effects of inter-action between a structure and its foundation. *Proc. British Geotech Soc. on Settlement of Structure*. London: Cambridge, 1974. 368 ~ 383

Numerical Solution of the Joint Action of Upper Structure and Foundation and Soil

Zhang Yi

(Quanzhou Licheng Inst. of Arch., 362000, Quanzhou)

Abstract The joint action of upper structure and foundation and soil is solved by adopting finite element of structural bar system, finite element of foundation beam and infinite boundary element of soil. A method is advanced for coupling finite element of bar system and that of foundation beam and for coupling finite element of foundation beam and infinite boundary element of soil. The correlation of structure-foundation-soil and the mechanism of their joint action are analysed by way of example calculation. The results from calculation indicate the accuracy and the validity of the method presented here; and illustrate the feasibility and the necessity of considering their joint action in engineering practice.

Keywords structure, foundation, soil, joint action, finite element, boundary element