

结构模态控制的“溢出”问题及控制策略^{*}

林 建 华

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 结构模态控制是结构振动控制的重要技术. 通常利用控制前少数阶振型反应来达到结构振动控制的目的. 但如果处理不当, 往往会产生控制溢出或观测溢出等问题. 文中从理论上讨论了结构模态控制的稳定性问题, 证明了未控模态或剩余模态的失控将影响控制系统的性能而导致整个系统的振动不稳定. 同时, 给出了可调参数 r_i 的取值范围, 并对模态主动控制中存在的溢出问题提出几种解决的方法.

关键词 模态, 主动控制, 稳定性, 结构振动

分类号 TU 311.3

近年来, 结构振动的主动控制技术在解决大型柔性结构的抑振问题上有了长足的进步, 由于大型柔性结构在地震作用下的反应一般由前少数阶振型反应控制. 因此, 从控制速度、经济要求和可靠度角度来看, 模态控制以其所具有的传感器、作动器元件数量少, CPU 存贮少和实时在线控制等优势更具有实际意义. 然而, 在实际应用中, 采用小数量传感器获取部分振动信息和小数量作动器控制大数量振动模态, 往往会遇到溢出问题——控制溢出或观测溢出. 未控模态或剩余模态的失控, 将影响控制系统的性能或导致整个系统的振动不稳定. 本文首先讨论了结构模态控制中的稳定性问题, 再对模态主动控制中存在的溢出问题提出几种解决方法.

1 结构的模态控制

考虑具有 n 维自由度的结构地震作用下, 当受到控制力 U 的作用时, 其运动微分方程可表示为

$$MX^{\circ\circ} + CX^{\circ} + KX = B_1U - MEX_g^{\circ}, \quad (1)$$

其中 M, C, K 为 $n \times n$ 阶质量、阻尼、刚度矩阵, X 和 U 分别是 $n \times 1$ 的相对位移向量和 $m \times 1$ 的控制力向量 ($m < n$), B_1 为 $n \times m$ 阶控制力位置矩阵, X_g° 为地震激励, E 为 $n \times 1$ 的单位向量. 在高柔结构的振动响应中, 高阶振型对结构响应贡献甚小. 因此, Yang 等人^[1]指出, 对高阶振型的控制没有多大的必要. 他们建议采用临界模态控制方法, 即对结构的响应贡献较大的振型进行控制.

对方程 (1) 进行正则模态变换, 即设 $X = \Phi Y$, 这里 Φ 为结构正则模态. 方程 (1) 可改写为

$$\ddot{Y} + D\dot{Y} + \Omega Y = \Phi^T B_1 U - \Phi^T M E \ddot{X}_g, \quad (2)$$

式中 $D = \text{diag}(2\xi_1\omega, 2\xi_2\omega, \dots, 2\xi_n\omega)$, $\Omega = \text{diag}(\omega^2, \omega^2, \dots, \omega^2)$. 令 $\Phi^T B_1 U = u$, $\Phi^T M E = \eta$, 则式(2)变为

$$\ddot{Y} + D\dot{Y} + \Omega Y = u - \eta \ddot{X}_g. \quad (3)$$

设对前 m 个振型进行控制, 则方程可分成受控与未受控两部分. 受控与未受控部分分别如式(4), (5)所示. 即

$$\ddot{Y}_c + D_c \dot{Y}_c + \Omega Y_c = U_c - \eta_c \ddot{X}_g, \quad (4)$$

$$\ddot{Y}_r + D_r \dot{Y}_r + \Omega Y_r = U_r - \eta_r \ddot{X}_g. \quad (5)$$

对受控部分, 写成状态方程为

$$\dot{Z} = AZ + B(U_c - \eta_c \ddot{X}_g), \quad (6)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega & -D_c \end{bmatrix}_{2m \times 2m}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{2m \times m}$, $Z = \begin{bmatrix} Y_c \\ \dot{Y}_c \end{bmatrix}_{2m \times 1}$. 取目标函数^[3]为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} [Z^T Q Z + U_c^T R U_c] dt \quad (7)$$

$Q = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}_{2m \times 2m}$; $R = \text{diag}(r_1/\omega^2, r_2/\omega^2, \dots, r_m/\omega^2)$, $r_i (i = 1, \dots, m)$ 为大于0的可调参数, 以保证 R 矩阵为正定矩阵; T_f 是比地震记录时间长的持续时间; 矩阵 Q 和 R 称作加权矩阵, 表示控制力与结构反应量之间相对重要程度. 利用经典最优化控制理论得闭环控制力^[3]为

$$U_c(t) = -DZ = -[D^1, D^2] \begin{bmatrix} Y_c \\ \dot{Y}_c \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中 $D = R^{-1} B^T P$, $P(t)$ 是 $2m \times 2m$ 阶的 Riccati 矩阵, 由下面微分方程确定:

$$\dot{P}(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = \dot{P}(t). \quad (9)$$

已经证明, 对于许多结构来讲, 在地震的整个持续时间内 Riccati 矩阵 $P(t)$ 保持常数, 接近 T_f 时迅速下降到0. 即从时间 T_f 开始返回的很短时间内, $P(t)$ 成为一个平衡状态. 所以对于地震作用下的结构, 可以采用常数 Riccati 矩阵 P , 则式(9)变成一个矩阵代数方程.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (10)$$

由此可解得

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{diag}[(C_1 - 2)\omega^2, (C_2 - 2)\omega^2, \dots, (C_m - 2)\omega^2], \\ D_2 &= \text{diag}[\overline{(4\xi_1^2 + C_1^2 - 4 - 2\xi_1)\omega}, \overline{(4\xi_2^2 + C_2^2 - 4 - 2\xi_2)\omega}, \dots, \\ &\quad \overline{(4\xi_m^2 + C_m^2 - 4 - 2\xi_m)\omega_n}], \quad C_i = \overline{1 + 1/r_i - 1}. \end{aligned}$$

2 结构振型控制的稳定性分析

把式(8)代入式(4), (5)可得结构闭环控制的方程为

$$\ddot{Y}_c + D_c \dot{Y}_c + \Omega Y_c = -D_1 Y_c - D_2 \dot{Y}_c - \eta_c \ddot{X}_g, \quad (11)$$

$$\ddot{Y}_r + D_r \dot{Y}_r + \Omega Y_r = U_r - \eta_r \ddot{X}_g. \quad (12)$$

注意到 $U_c = \Phi^T B_1 U = -D_1 Y_c - D_2 \dot{Y}_c$, 故有式(13)并从而有式(14). 即

$$U = -(\Phi^T B_1)^{-1} D_1 Y_c - (\Phi^T B_1)^{-1} D_2 \dot{Y}_c, \quad (13)$$

$$U_r = \Phi^T B_1 U = -\Phi^T B_1 (\Phi^T B_1)^{-1} D_1 Y_c - \Phi^T B_1 (\Phi^T B_1)^{-1} D_2 \dot{Y}_c. \quad (14)$$

现分两种情况研究结构振型控制的稳定性问题.

2.1 全状态可测

在此情况下, 结构上布置有 n 个位移和速度传感器, 以采集 n 个自由度独立的位移和速度信号 $\{X\}_{n \times 1}$ 或 $\{\dot{X}\}_{n \times 1}$. 通过全模态转换, $X = \Phi Y$, $\dot{X} = \Phi \dot{Y}$. 在全状态可测情况下, Y_c 和 \dot{Y}_c 可由振型矩阵和所测的全部位移和速度精确描述. 即存在

$$Y = \Phi^{-1} X, \quad \dot{Y}_c = \Phi^{-1} \dot{X}, \quad Y_r = \Phi^{-1} X. \quad (15)$$

此时式(11), (12), (14) 严格成立并可变化为

$$\ddot{Y}_c + (D_c + D_2) \dot{Y}_c + (\Omega + D_1) Y_c = -\eta_c \ddot{X}_g, \quad (16)$$

$$\ddot{Y}_r + D_r \dot{Y}_r + \Omega Y_r = -G_1 D_1 Y_c - G_1 D_2 \dot{Y}_c - \eta X_g. \quad (17)$$

下面对该系统进行稳定性分析, 因 \ddot{X}_g 不影响对系统稳定性的讨论, 可以不必考虑它. 故对于受控部分, 定义其 Liapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \dot{Y}_c^T \dot{Y}_c + \frac{1}{2} Y_c^T (\Omega + D_1) Y_c. \quad (18)$$

注意到 $(\Omega + D_1) = \text{diag}[(C_1 - 1)\omega_1^2, (C_2 - 1)\omega_2^2, \dots, (C_m - 1)\omega_m^2]$ 是个对称、正定方阵. 式(18)对时间求一阶导数可得 $dV/dt = -\dot{Y}_c^T (D_c + D_2) \dot{Y}_c$. 显然, 只有当 $dV/dt < 0$ 时, 方可满足 Liapunov 稳定性条件^[6]. 这就要求 $(D_c + D_2)$ 必须是个正定矩阵. 由于

$$(D_c + D_2) = \text{diag}\left[\omega_1 \sqrt{4\xi_1^2 + C_1^2 - 4}, \omega_2 \sqrt{4\xi_2^2 + C_2^2 - 4}, \dots, \omega_m \sqrt{4\xi_m^2 + C_m^2 - 4}\right],$$

因此条件归结为确定可调参数 r_i , 使得 $4\xi_i^2 + C_i^2 - 4$ 为正实数. 可以证明, 要使

$$4\xi_i^2 + C_i^2 - 4 = 4\xi_i^2 + \left(1 + \frac{1}{r_i} - 1\right)^2 - 4 > 0,$$

要求可调参数 r_i 必须满足

$$0 < r_i < \frac{1 - \xi_i^2 - \frac{1 - \xi_i^2}{4\xi_i^2(\xi_i^2 - 1)}}{4\xi_i^2(\xi_i^2 - 1)}. \quad (19)$$

由此可见, 即使在全状态可测的情况下, 可调参数也不能随意选取, 否则将无法保证系统振动的稳定性. 在以往的最优控制分析中, 这一点往往被忽视.

对于未受控部分, 由于 D_r 和 Ω 都是正定矩阵, 它们保证了未控模态的稳定性. 但是由于存在 $-G_1 D_1 Y_c - G_1 D_2 \dot{Y}_c$ 项, 即控制力对未受控部分将产生一个附加的, 并且可能是不利的影响. 这种不利影响可能导致系统的控制溢出, 虽不破坏未控模态的稳定性, 但将影响实际系统的性能.

2.2 结构部分可测

在此情况下, 结构仅在 $m (m < n)$ 个点上布置传感器测量该点的位移或速度. 设所测的位移、速度向量为

$$\dot{X}_d = B_2 \dot{X}, \quad \dot{X}_d = B_2 \dot{X}, \quad (20)$$

其中 \dot{X}_d , X_d 为 $m \times 1$ 的位移、速度测量信号, B_2 为 $m \times n$ 的测量位置矩阵. 其元素 b_{ij} 为

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 个传感器置于第 } j \text{ 个自由度上} & i = 1, 2, \dots, m, \\ 0 & \text{其它} & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

X_d 与模态坐标的关系为

$$X_d = B_2 \Phi Y_c + B_2 \Phi Y_r. \quad (21)$$

当近似用 m 个受控模态来表征 X_d 时

$$X_d = B_2 \Phi Y_c. \quad (22)$$

在 m 个自由度可测的情况下, Y_c 可通过对式 (22) 求逆唯一确定, 即

$$Y_c = (B_2 \Phi)^{-1} X_d. \quad (23)$$

把式 (21) 代入式 (23) 可得

$$\bar{Y}_c = Y_c + (B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi Y_r. \quad (24)$$

用式 (24) 的 \bar{Y}_c 代替式 (13), (14) 的 Y_c, \dot{Y}_c , 可得部分可测状态下各控制力向量为

$$U_c = -D_1 Y_c - D_1 (B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi Y_r - D_2 \dot{Y}_c - D_2 ((B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi \dot{Y}_r), \quad (25)$$

$$U_r = -\Phi^T B_1 (\Phi^T B_1)^{-1} D_1 [Y_c + ((B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi Y_r) - \Phi^T B_1 (\Phi^T B_1)^{-1} D_2 [Y_c + (B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi \dot{Y}_r], \quad (26)$$

$$U = -(\Phi^T B_1)^{-1} D_1 [Y_c + (B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi Y_r] - (\Phi^T B_1)^{-1} D_2 [Y_c + (B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi \dot{Y}_r]. \quad (27)$$

把式 (25) 代入式 (11), 式 (26) 代入式 (12), 并记 $G_1 = \Phi^T B_1 (\Phi^T B_1)^{-1}$, $G_2 = (B_2 \Phi)^{-1} B_2 \Phi$, 可得受控部分 式(28) 和未受控部分 式(29) 的方程分别为

$$\ddot{Y}_c + (D_c + D_2) \dot{Y}_c + (\Omega + D_1) Y_c = -D_2 G_2 \dot{Y}_r - D_1 G_2 Y_r - \eta \ddot{X}_g, \quad (28)$$

$$\ddot{Y}_r + (D_r + G_1 D_2 G_2) \dot{Y}_r + (\Omega + G_1 D_1 G_2) Y_r = -G_1 D_2 \dot{Y}_r - G_1 D_1 Y_r - \eta \ddot{X}_g. \quad (29)$$

显然, 当对未受控部分建立 Liapunov 函数 $V = \frac{1}{2} \dot{Y}_r^T \dot{Y}_r + \frac{1}{2} Y_r^T (\Omega + G_1 D_1 G_2) Y_r$ 时有两方面情况. 一方面, 由于作动器的位置矩阵 B_1 和传感器的测量位置矩阵不同, 而导致 $G_1 D_1 G_2$ 无法成为对称矩阵; 另一方面, 更重要的是无法保证 $G_1 D_2 G_2$ 矩阵是正定或半正定矩阵, 使用 dV/dt 不可能恒小于 0, 从而无法满足 Liapunov 稳定条件, 而导致未控部分方程解的不稳定. 而受控部分由于 $-D_2 G_2 \dot{Y}_r - D_1 G_2 Y_r$ 不稳定项的介入, 将导致该部分的稳定性受到影响, 并由此产生通常所说的控制溢出和观测溢出.

从上面的理论推导可以看出, 在结构模态控制中采用小数量传感器获取部分振动信息和小数量作动器控制大数量振动模态, 由于未控模态或剩余模态的失控, 将会导致个别剩余模态的能量溢出, 从而造成结构控制的不稳定. Balas^[8]等人的实验也证明了这种现象的存在.

3 溢出问题的控制策略

从上面分析可知, 用小数量传感器测量部分振动信息和小数量作动器控制大数量振动模态, 不可避免都遇到溢出问题, 下面提出四种解决这一问题的控制策略.

3.1 采用直接速度反馈控制

在直接速度反馈控制法中, 控制力为

$$f(t) = -QU(t) = -QB^{-1}Y, \quad (30)$$

式中 Q 为 $m \times m$ 阶的对称、非负、正定的增益矩阵, B 为控制位置矩阵($m \times n$ 阶, $m < n$)。因此,则在闭环控制中,振型控制方程变为

$$\ddot{Y} + (D + BQB^T)\dot{Y} + \Omega Y = -\eta \ddot{X}_g^{\circ} \quad (31)$$

定义 Liapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \dot{Y}^T \dot{Y} + \frac{1}{2} Y^T \Omega Y,$$

此式对时间求一阶导数,并考虑 \ddot{X}_g° 不影响稳定性分析。可得 $\frac{dV}{dt} = -\dot{Y}^T (D + BQB^T) \dot{Y}$, 由于 D, Q 都是正定矩阵,且 B 为非负的位置矩阵。所以, $G + BQB^T$ 也为正定矩阵,故 $\frac{dV}{dt} < 0$, 满足 Liapunov 稳定条件,因而直接速度反馈控制是稳定的。

3.2 构造特殊的控制位置矩阵

式从(29)可以看出,导致系统不稳定的因素,主要是矩阵 $G_1 D_2 G_2, G_1 D_1 G_2$ 不可能是对称、正定或半正定矩阵。显然要达到此目的是困难的,但若构造特殊的控制位置矩阵,使得 $G_1 = 0$, 则方程(28), (29)就可满足 Liapunov 稳定条件。文献[5]曾提出构造问题, $B_1 = M\Phi L$, 式中 $\Phi = \sum_{i=1}^m \Phi_i^e$, L 为元素为 1 的 m 维行向量。根据振型正交条件,则有 $G_1 = \Phi^T M \Phi L$ ($\Phi^T M \Phi L$) $^{-1} = 0$ 。理论上,此方法似乎可行。实际上,产生这样的作动效应几乎是不可能的,因为此时的位置矩阵 B_1 为 $n \times m$ 阶满阵。因此,只采用 m 个作动器无论如何也无法同时作用于 n 个施控点上。

3.3 独立模态空间控制^[6]

独立模态空间控制法,它对几个主要模态分别进行控制设计。求出的模态控制作用,它通过模态参与矩阵进行性变换,由模态控制作用得出结构控制作用。严格来讲,独立模态控制的必要条件是控制器布满体系的所有自由度。阎维明等人指出,当控制器数目少于体系自由度时,作为一种近似方法,只要所截取的模态数目和控制器数目相同,也可应用此法。

3.4 修正的独立模态空间控制法

修正的独立模态空间控制策略,是根据结构的模态能量($\dot{Y}_i^2 + Y_i \omega^2$)的高低,对系统各阶模态进行由高到低的排序。如果受控结构作用有 m 个作动器,则这 m 个作动器将用在控制前 m 个振动模态,降低受控模态能量。由于存在“溢出”问题,在控制前 m 个模态的同时会激励非受控模态,一旦非受控模态能量超过前 m 个受控模态中任何一个模态的能量,作动器就转向作用于这些非受控模态,抑制它们的振动。如此反复,最终使结构的振动受到抑制。计算机的仿真结果,表明这种策略是十分有效的^[7]。

4 结论

(1) 最优闭环控制中可调参数的不合理选取,将影响结构控制的稳定性。

(2) 有限的作动器的布置会使系统受控模态对未受控模态产生激励作用,并会产生控制溢出现象,影响控制系统的性能。有限作动器和有限传感器的布置,会使系统同时产生控制溢出和观测溢出,并影响系统的稳定性。

(3) 在解决溢出问题的几种方法中,直接速度反馈控制可用来增加结构阻尼和抑制振动,

具有较强的鲁棒性。但是该方法仍属于低权限控制。构造特殊控制位置矩阵方法,其理论上可行,但在实际应用中却难以实现。独立模态空间控制策略要求控制器布满体系所有自由度,否则无法从根本上消除溢出现象。修正的独立模态空间控制策略,它仍保持振型控制的优点和结构高权限控制的高性能特性,故是一种较好的控制策略。

参 考 文 献

- 1 Yang J N. Control of tall buildings under earthquake excitation. J. Engrg. Mech. Div. ASCE, 1982, 108 (5): 833 ~ 849
- 2 Yang J N, Soong T T. Recent advancement in active control of civil engineering structure. J. of Probabilistic Engrg. Mech., 1988, 67(4): 635 ~ 650
- 3 蔡燧林, 盛 骤. 常微分方程组与稳定性理论. 北京: 北京高等教育出版, 1986. 186 ~ 192
- 4 Balas M J. Feedback control of flexible system. IEEE Transactions on Automatic Control, 1978, 23(3): 673 ~ 679
- 5 李春祥, 刘艳霞, 代玉娟. 结构振型控制系统的稳定性分析. 工程力学, 1997, 3(增刊): 205 ~ 211
- 6 Yan Weiming, Zhou Yongcheng, Liu Ji. A new algorithm for active structure control-KCE control algorithm. Liu Ji, eds. The 4th International Symposium on Structure Engineering for Yong Experts. Beijing: Copyright by China Architecture and Building Press, 1996. 291 ~ 296
- 7 Baz A, Poh S. Modified independent model space control method for active control of flexible system. J. of IME. Pvxt. C, 1989, 20(3): 203 ~ 206

“Overflow” of Structural Model Control and Its Solving

Lin Jianhua

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Structural model control is an important technique of structural vibration control. Usually, it attains the goal of structural vibration control by using a few pre-harmonic response. However, its mishandling often brings about controlling overflow or observational overflow. Beginning with a theoretical discussion on stability of structural model control, the author demonstrates that uncontrolled mode or lose control of surplus mode will affect the performance of control system and thus will lead to vibration instability of entire system; and gives the codomain of adjustable parameter r_1 ; and proposes several methods for solving overflow existing in active control of structural mode.

Keywords mode, active control, stability, structural vibration