第20卷 第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 20 No. 4
1999年10月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 1999

两类新的高稳定性的三层显式差分格式*

曾文平　　郑邵鹏

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　提出解高阶演化方程 $\partial u/\partial t = a(\partial^{2k+1}u)/\partial x^{2k+1}$(其中 $a\neq 0$ 为常数, $k=1,2,3,\cdots$) 的两类新的具有高稳定性的三层显式差分格式, 较大地改进了同类格式的稳定性条件. 数值例子表明, 文中所作的稳定性分析是正确的.

关键词　高阶演化方程, 显式差分格式, 稳定性分析

分类号　O 241.82

文 [1] 分别对方程 $u_t = au_p$ 当 p 为奇数及偶数的情况, 建立若干差分格式. 文 [2, 3] 进一步构造了若干具高稳定性的三层显式差分格式, 改进了文 [1] 的结果. 尽管如此, 文 [1～3] 中的显式格式的稳定性条件仍较为苛刻, 而隐式格式则导致解线性方程组使计算量大为增加. 本文将着重讨论演化方程 $u_t = au_p$ 当 p 为奇数, 即 $p=2k+1$ 时的方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} \qquad (a\neq 0 \text{ 为常数}, k\geq 1 \text{ 的整数}). \tag{1}$$

建立两类具有更高稳定性的三层显式差分格式, 大大地改进了文 [1～3] 同类格式的稳定性条件. 数值例子表明, 本文所建立的差分格式是有效的, 其稳定性分析是正确的.

1　差分格式的构造

设微分方程的解 $u(x,t)$ 存在、唯一且充分光滑. 在差分格式中, u_m^n 表示定义在网域上的离散函数, 并设 $r = a\tau/h^{2k+1}$ 为网格比, 其中 h, τ 分别表示空间方向和时间方向步长.

1.1　带耗散项的三层显式格式

类似于在一阶微分方程中引进具有小参数、对应于粘性的二阶导数, 在方程(1) 中加进具有小参数 ϵ 的人工粘性项(耗散项) $\epsilon\dfrac{\partial^{2k+3}u}{\partial x^{2k+3}}$, 得到方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} + \epsilon\frac{\partial^{2k+3}u}{\partial x^{2k+3}}. \tag{2}$$

然后离散化, 且令 $\epsilon = rah^2/8$ 并舍去截断误差 $O(\tau + h^2)$, 则得带耗散项的第一个差分格式为

$$u_{m+1}^{n+1} = u_{m+1}^n - u_{m-1}^n + u_{m-1}^{n-1} + r\delta_x^{2k}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{r^2}{8}\delta_x^{2k+2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n), \tag{3}$$

---

* 本文 1999-02-27 收到

其中 $\delta_x^{2k}u_m^n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\begin{pmatrix}k\\j\end{pmatrix}u_{m-j}^k$ 表示 $u(x,t)$ 在 (x_m,t_n) 处的 $2k$ 阶中心差分算子.

类似地若取 $\epsilon=-rah^2/8$, 略去截断误差 $O(\tau+h^2)$ 后, 则得带耗散项的第二个差分格式为

$$u_{m-1}^{n+1}=u_{m-1}^n-u_{m+1}^n+u_{m+1}^{n-1}+r\delta_x^{2k}(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)-\frac{r^2}{8}\delta_x^{2k+2}(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n). \tag{4}$$

显然, 显式格式(3)与(4)当 $\tau=O(h^{2k+1})$ 时均相容于方程(1).

1.2 双步长的三层显式格式

为了得到具有更高稳定性的三层显式格式, 按下列方式构造差分格式:

$$(u_t)_m^n=\frac{1}{2}\{(u_t)_{m+2}^n+(u_t)_{m-2}^n\}+O(h^2),$$

$$(u_t)_{m+2}^n=\frac{1}{\tau}(u_{m+2}^{n+1}-u_{m+2}^n)+0(\tau),$$

$$(u_t)_{m-2}^n=\frac{1}{\tau}(u_{m-2}^n-u_{m-2}^{n-1})+O(\tau),$$

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)_m^n=\frac{1}{2\cdot(2h)^{2k+1}}\delta_{2x}^{2k}(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)+O(h^2).$$

将上述公式代入高阶演化方程(1)且舍去截断误差 $O(\tau+h^2)$ 后, 便得本文构造的第一个双步长差分格式为

$$u_{m+2}^{n+1}=\frac{r}{2^{2k+1}}\delta_{2x}^{2k}(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)+u_{m+2}^n-u_{m-2}^n+u_{m-2}^{n-1}, \tag{5}$$

其中 δ_{2x}^{2k} 表示关于 x 方向的步长为 $2h$ 的 $2k$ 阶中心差分算子.

如在导出公式(5)的过程中, 将 $(u_t)_{m-2}^n$ 及 $(u_t)_{m+2}^n$ 分别用下列公式

$$(u_t)_{m-2}^n=\frac{1}{\tau}(u_{m-2}^{n+1}-u_{m-2}^n\}+O(\tau),\ (u_t)_{m+2}^n=\frac{1}{\tau}(u_{m+2}^n-u_{m+2}^{n-1})+O(\tau)$$

代替, 可得第二个双步长差分格式为

$$u_{m-2}^{n+1}=\frac{r}{2^{2k+1}}\delta_{2x}^{2k}(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)+u_{m-2}^n-u_{m+2}^n+u_{m+2}^{n-1}. \tag{6}$$

显见格式(5),(6)的截断误差为 $O(\tau+h^2)$. 特别地, 文[4,5]对色散方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$ 所给的带耗散项格式及双步长格式, 即为本文同类格式当 $k=1$ 时的特例. 后面所得的稳定性条件当 $k=1$ 时的结果, 也与文[4,5]结果相同.

2 差分格式稳定性分析

下面用 Fourier 方法分析差分格式的稳定性.

2.1 带耗散项的三层显格式(**3**)和(**4**)

该三层显格式(3),(4)的特征方程为

$$f(\lambda)=\lambda^2e^{i\theta}-2i\lambda\sin\theta\{1+r(-4\sin^2\frac{\theta}{2})^k+\frac{r^2}{8}(-4\sin^2\frac{\theta}{2})^{k+1}\}-e^{-i\theta}=0. \tag{7}$$

差分格式(3)稳定的条件为它的特征方程 $f(\lambda)=0$ 的全部根按模小于或等于1, 且模为1为单根. 易证

$$\hat{f} \equiv \frac{1}{\lambda}\{f(0)f^*(\lambda) - f(\lambda)f^*(0)\} \equiv 0,$$

于是由 Miller 准则 1[6] 知, 只要考察 $f(\lambda)=0$ 的根 $\lambda = i\sin\theta\{1 + r(-4\sin^2\frac{\theta}{2})^k + \frac{r^2}{8}(-4\sin^2\frac{\theta}{2})^{k+1}\}e^{-i\theta}$. 由 $|\lambda| \le 1$ 得

$$-1 \le \sin\theta\{1 + r(-4\sin^2\frac{\theta}{2})^k + \frac{r^2}{8}(-4\sin^2\frac{\theta}{2})^{k+1}\} \le 1. \tag{8}$$

不难看出, 对任意 $k \ge 1$ 的整数, ± 1 不是特征方程 $f(\lambda)=0$ 的重根.

当 $\sin\theta = 0$ 时, 式(8) 恒成立. 今设 $\sin\theta \ne 0$, 且注意到当 $a>0$ 时有 $r>0$, 而 $a<0$ 时则 $r<0$ 以及三角函数的周期性, 解不等式(8) 得差分格式(3) 的稳定性条件. (1) 当 k 为奇数. (a) $a>0$ 时, 稳定性条件为

$$r \le \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\sqrt{(4\sin^2\frac{\theta}{2})^{k-1} - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sin\theta})}}{2^{k-1}(\sin\frac{\theta}{2})^{k+1}} \quad (0<\theta<\pi); \tag{9}$$

(b) $a<0$ 时为绝对不稳定. (2) 当 k 为偶数. (a) $a>0$ 时, 稳定性条件为

$$r \le \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\sqrt{(4\sin^2\frac{\theta}{2})^{k-1} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sin\theta})}}{2^{k-1}(\sin\frac{\theta}{2})^{k+1}} \quad (0<\theta<\pi); \tag{10}$$

(b) $a<0$ 时, 稳定性条件为

$$-r \le \frac{-1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\sqrt{(4\sin^2\frac{\theta}{2})^{k-1} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sin\theta})}}{2^{k-1}(\sin\frac{\theta}{2})^{k+1}} \quad (0<\theta<\pi). \tag{11}$$

若记式(9)～(11) 的右端函数为 $F(\theta)$, 仿照文[4] 根据微分学极值原理可求得 $F'(\theta)=0$. 然后, 用对分法可以求得 $F'(\theta)=0$ 的近似根 θ^*, $F(\theta)$ 的近似下确界 $F(\theta^*) = \inf_{0<\theta<\pi} F(\theta)$, 从而可得格式(3) 的稳定性条件 $|r| \le r_{opt} = F(\theta^*)$. 类似地可得格式(4) 的稳定性条件. 由于 $F'(\theta)=0$ 的表达式过于繁杂而将其略去, 只将计算结果列表(表 1) 并与蛙跳格式的稳定性条件 $|r| \le (k+1)/\sqrt{(2k+1)^{2k+1}}$[1] 比较.

表 1　差分格式(3), (4) 与蛙跳格式[1] 稳定性条件比较表

k	θ^* (°)	格式(3) ($a>0$) (4) ($a<0$) 稳定条件 r_{opt}	θ^* (°)	格式(3) ($a<0$) (4) ($a>0$) 稳定条件 r_{opt}	蛙跳格式 稳定条件
1	148.053 30	2.382 484		0	0.384 900 10
2	160.118 78	2.296 315	140.580 92	0.000 366	0.120 747 67
3	166.169 22	2.080 118		0	0.053 261 90
4	171.194 06	2.041 546	149.140 91	0.000 081	$9.919\,87\times10^{-3}$
5	174.362 51	2.013 881		0	$2.729\,59\times10^{-3}$
6	176.436 62	2.006 123	153.695 39	0.000 020	$7.393\,90\times10^{-4}$

由表可看出下列 3 点. (1) 当 $a>0$ 时格式(3) 及 $a<0$ 时格式(4) 的稳定性条件, 明显地优

于蛙跳格式的稳定性条件．它约为蛙跳格式的 $8\sim10^3$ 倍，稳定性条件有较大改进．(2) 当 $a<0$ 时格式(3) 及 $a<0$ 时格式(4)，实质上都是绝对不稳定的或稳定性条件过分苛刻以致于不切实用．(3) 当 $a<0$ 时格式(3) 及 $a<0$ 时格式(4) 的稳定性条件，随着方程阶数 $2k+1$ 的增加而逐步减少，但减少得很缓慢，如 $k\to6(2k+1\to13)$ 时，$r_{opt}\to2$．

2.2 双步长显式格式(5) 和(6)

由 Fourior 分析法，可得格式(5) 的特征方程为

$$\lambda^2 e^{i2\theta}-2i\lambda\{1+\frac{r}{2}(-\sin^2\theta)^k\}\sin2\theta-e^{-i2\theta}=0. \tag{12}$$

由 Miller 准则 2[6]，知差分格式(5) 的稳定性条件为

$$-1<\sin2\theta\{1+\frac{r}{2}(-\sin^2\theta)^k\}<1.$$

由此仿照文[4] 的讨论，可得格式(5) 的稳定性条件:

(1) $k=2m-1$ 为奇数($m=1,2,3,\cdots$) 且 $a>0$ 时，有

$$r<\frac{2(1+\sin2\theta)}{\sin2\theta\sin^{4m-2}\theta}\quad(\sin2\theta>0), \tag{13}$$

而 $a<0$ 时绝对不稳定．

(2) $k=2m$ 为偶数($m=1,2,3\cdots$) 且 $a<0$ 时，有

$$-r<\frac{2(1+\sin2\theta)}{\sin2\theta\sin^{4m}\theta}\quad(\sin2\theta>0), \tag{14}$$

而 $a>0$ 时绝对不稳定．

同理，可得格式(6) 的稳定性条件:

(1) $k=2m-1$ 为奇数($m=1,2,3,\cdots$) 且 $a<0$ 时，有

$$-r<\frac{2(1+\sin2\theta)}{\sin2\theta\sin^{4m-2}\theta}\quad(\sin2\theta>0), \tag{15}$$

而 $a>0$ 时绝对不稳定．

(2) $k=2m$ 为偶数($m=1,2,3,\cdots$) 且 $a>0$ 时，有

$$r<\frac{2(1+\sin2\theta)}{\sin2\theta\sin^{4m}\theta}\quad(\sin2\theta>0), \tag{16}$$

而 $a<0$ 时绝对不稳定．

若令式(13)～(16) 的右端函数为 $F(\theta)=\dfrac{2(1+\sin2\theta)}{\sin2\theta\sin^{2k}\theta}$，类似于前面讨论，根据极值原理可以数值求出差分格式(5)，(6) 的稳定性条件如表 2 所示．我们曾经计算出 $k=1\sim86$ 的格式(5)，(6) 的稳定性条件．为节省篇幅起见，这里仅列出 $k=1\sim20$ 的稳定性条件．

根据上述讨论，可对表 2 作出如下几点说明．

(1) 当 k 为奇数时，格式(5) ($a<0$) 及格式(6) ($a>0$) 恒不稳定；当 k 为偶数时，格式(5) ($a>0$) 及格式(6) ($a<0$) 恒不稳定．

(2) 当 k 为奇数时，格式(5) ($a>0$) 和格式(6) ($a<0$)，以及当 k 为偶数时格式(5) ($a<0$) 和格式(6) ($a>0$) 均为条件稳定，其稳定性条件如表 2 所示．

(3) 当差分格式(5)，(6) 条件稳定时，若 k 为奇数($k=1,3,\cdots,19$)，稳定性条件由 $|r|\leq 5.613\,277\,814\,7$ 单调递增至 13.420 655 881 0；当 $k\leq10$ 为偶数时，格式为绝对不稳定；但当

$12\le k\le 20$ 的偶数时, 稳定性条件由 $|r|\le 4.5788554027$ 单调递增至 7.009 347 953 5, 其稳定性条件均比格式(3), (4) 有较大幅度放宽, 更不用说比蛙跳格式好.

表 2　差分格式(5) 和(6) 的稳定性条件

k	θ	稳定性条件	k	θ	稳定性条件
1	1.132	5.613 277 814 7	11	1.392	10.985 421 663 0
2	0.785	0.000 000 000 0	12	1.294	4.578 855 402 7
3	1.270	7.290 064 264 8	13	1.404	11.660 488 279 0
4	0.785	0.000 000 000 2	14	1.324	5.257 146 844 9
5	1.324	8.462 598 558 5	15	1.414	12.285 350 399 0
6	0.785	0.000 000 000 7	16	1.346	5.880 813 280 9
7	1.355	9.418 443 581 4	17	1.423	12.869 755 112 0
8	0.785	0.000 000 002 8	18	1.363	6.462 204 540 9
9	1.376	10.245 733 222 0	19	1.430	13.420 655 881 0
10	0.785	0.000 000 011 2	20	1.377	7.009 347 953 5

3　数值例子

分别考虑下列两种演化方程初值问题.

(1) $k=2$ 时演化方程(1) 具初始条件 $u(x,0)=x^5+6$, 其精确解为

$$u^*(x,t)=120at+x^5+6.$$

(2) $k=3$ 时演化方程(1) 具初始条件 $u(x,0)=\frac{1}{42}x^7+6$, 其精确解为

$$u^{**}(x,t)=120at+\frac{1}{42}x^7+6.$$

为了验证差分格式(3) ～(6) 的稳定性条件, 我们编程上机进行计算. 对节 3(1) 的问题可以按带耗散项格式(3), (4) ($k=2$) 进行计算; 对节 3(2) 的问题则按双步长格式(5), (6) ($k=3$) 进行计算.

定义误差 $T_m^n=|u(x_m,t_n)-u_m^n|$, 其中 $u(x_m,t_n)$ 表示精确解. u_m^n 为用差分格式算出的差分解. 表3, 4列出按差分格式(3) ～(6) 计算的部分误差数据. 值得注意的是, 由于本文所构造

表 3　差分格式(3) 和(4) 计算节 3(1) 例的数值误差表

a	h	r	m/n	1 300	1 500	1 700	1 900
1	0.01	2.296	200	1.196288×10^{-5}	6.227835×10^{-6}	8.357424×10^{-4}	3.655743×10^{-5}
1	0.01	2.297	200	7.550799×10^{11}	4.485020×10^{10}	7.401738×10^{12}	5.051173×10^{12}
−1	0.01	−2.296	200	5.385867×10^{-4}	1.251688×10^{-3}	8.399785×10^{-4}	4.334299×10^{-3}
−1	0.01	−2.297	200	7.253087×10^{9}	6.599524×10^{9}	3.415655×10^{11}	2.557339×10^{11}

表 4　差分格式(5) 和(6) 计算节 3(2) 例的数值误差表

a	h	r	m/n	1 300	1 600	2 000
1	0.01	7.285	150	7.980102×10^{-5}	8.990550×10^{-5}	1.013224×10^{-5}
1	0.01	7.295	150	1.098333×10^{10}	4.866350×10^{10}	3.796823×10^{10}
−1	0.01	−7.285	150	8.741043×10^{-5}	2.865311×10^{-4}	3.524689×10^{-4}
−1	0.01	−7.295	150	2.967645×10^{9}	2.998763×10^{8}	4.630522×10^{10}

的两种类型的差分格式都是三层格式,故除初始层网格函数值已知外,尚须先用其他方法算出第一层网格函数值.为简便计,我们按精确值计算第一层网格函数值.

由表3,4可以看出:(1) 当 $k=2$ 时,取 $|r|=2.296$ 按格式(3),(4),对节3(1)例子进行计算是稳定的;而取 $|r|=2.297$ 计算不稳定;(2) 当 $k=3$ 时,取 $|r|=7.285$ 按格式(5),(6),对节3(2)例子进行计算是稳定的;而取 $|r|=7.295$ 计算不稳定.

上述结果表明,我们所作的理论分析是正确的,理论分析与实际计算完全吻合.

本文为校科研基金资助项目.

参 考 文 献

1 秦孟兆.一类演化方程 $u_t=\alpha u^q u_1+au_p$ 的差分格式.科学通报,1982,27(5):261～263

2 曾文平.一类演化方程的高稳定性的差分格式.计算物理,1995,12(4):565～570

3 曾文平.高阶发展方程的两类显式格式的稳定性分析.华侨大学学报(自然科学版),1996,17(3):231～235

4 林鹏程.色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的一类具高稳定性的三层显式格式.应用数学和力学,1988,9(9):803～808

5 林鹏程.色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的两类高稳定性三层显式格式,福州大学学报(自然科学版),1990,18(1):6～12

6 Miller J J H. On the location of zero of certain classes of polynomials with application to numerical analysis. J. Inst. Math. Appls, 1971,(8):397～406

Two New Classes of Three-Level Explicit Difference Schemes with Higher Stability

Zeng Wenping   Zheng Shaopeng

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Two new classes of three-level explicit difference schemes with higher stability are advanced for solving high order evolution equation $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$(where $a\neq 0$ is a constant, $k=1,2,3,\cdots$) with higher stability. By which the stability condition of similar schemes can be greatly improved. Numerical examples indicate the correctness of the stability analysis given in the present work.

Keywords high order evolution equation, explicit difference schemes, stability analysis