第20卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.20 No.4
1999年10月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct.1999

具有混合试验中参数的Bayes估计及其分布函数*

陈 建 伟

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 混合试验是寿命分析中极其有用的检验设计,它比定时试验或定数试验提供更多的试验信息. 由此研究了混合试验中指数分布参数的Bayes估计, 并导出Bayes估计的分布函数.

关键词 混合试验, Bayes估计, 指数分布, Bayes估计的分布函数
分类号

1 问题的提出

试验设计是寿命测验、生存分析和生命科学中极其重要的验检手段. 通常有多种类型的试验方法. 当检验费用随着时间而迅速增加时, 可以选用定时试验(Type Ⅰ Censoing); 当产品的样本极昂贵时, 一般采用定数试验(Type Ⅱ Censoing)以降低检验费用. 混合试验是定时试验和定数试验的有用推广, 它结合了这两种试验的优点以便提供较可靠的试验信息. 混合试验要求检验在一个给定的时间或者一个给定的产品数失效时停止. 这种试验是一种极其经济和有效的检验方法. 然而, 由于混合试验的试验时间和产品的失效个数都预先未知, 也就是说这两个指标都是随机变量. 因此, 混合试验中的统计性质就变成非常复杂, 从而限制了混合试验的实用性.

在寿命分析中, 产品的质量通常都服从于寿命分布, 例如指数分布、Weibull分布和伽玛分布. 实际上, 指数分布是一个最常用的分布并在寿命检验和生存分析中起着重要的作用. 1995年, Balakrishnan [1]系统地介绍了指数分布在各个领域的应用. 特别地, 文[1]给出了具有混合试验的指数分布参数的最大似然估计. Lam于(1990和1994年)[2,3]分别研究了具有定时试验和定数试验下, 变量抽样方案的优化设计. 1999年, Chen[4]研究了具有混合试验变量抽样方案的决策论方法. 1998年, Chen运用Bayesian决策论方法, 给出了具有混合试验变量接受方案的最优Bayesian决策准则. 本文试图研究混合试验中指数分布模型参数的Bayes估计, 同时推导出Bayes估计的分布函数. 这些结果, 对于推动混合试验的应用和发展, 都十分有益.

2 混合试验(r, t)

设$X_1, \cdots, X_n$是独立同分布的随机变量并且服从指数分布$\exp(\lambda)$, λ是一个未知的参数.

* 本文1999-04-11收到

设 $X_{(1)}\leq\cdots\leq X_{(n)}$ 是相应的顺序统计量并基于混合试验 (r,t)，其中 r 和 t 是已知的试验参数.

设 $\tau=\min\{X_{(r)},t\}$ 和 $M(\tau)=\max\{i:X_{(i)}<\tau\}$，则 τ 表示混合试验的检验时间，$M(\tau)$ 代表至时间 τ 时样本的失效个数. 故实际的观察样本值，可表示为 $Z_i=\min\{X_{(i)},\tau\}$，$i=1,\cdots,n$. 显然，试验时间 τ 和失效数 $M(\tau)$ 都是随机变量. 因此，我们得到 τ 的分布函数为

$$P(\tau\leq y\mid\lambda)=\begin{cases}\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}(1-\exp\{-\lambda y\})^k\exp\{-\lambda(n-k)y\}, & y<t,\\ 1, & y\geq t,\end{cases}\tag{1}$$

并且 $M(\tau)$ 的概率分布为

$$P(M(\tau)=k\mid\lambda)=\begin{cases}\binom{n}{k}(1-\exp\{-\lambda t\})^k\exp\{-\lambda(n-k)t\}, & k=0,\cdots,r-1,\\ \sum_{j=r}^{n}\binom{n}{k}(1-\exp\{-\lambda t\})^j\exp\{-\lambda(n-j)t\}, & k=r,\\ 0, & k=r+1,\cdots,n.\end{cases}\tag{2}$$

利用式(1)和式(2)，平均试验时间和平均总失效数可表示为

$$\begin{aligned}E(\tau\mid\lambda)&=\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\int_0^t(1-\exp\{-\lambda y\})^k\exp\{-\lambda(n-k)y\}\mathrm{d}y=\\&\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{k}\binom{k}{j}\frac{1}{(n-k+j)\lambda}(1-\exp\{-\lambda(n-k+j)t\})\end{aligned}\tag{3}$$

和

$$\begin{aligned}E(M(\tau)\mid\lambda)&=\sum_{k=0}^{r-1}kP(M(\tau)=k\mid\lambda)+rP(M(\tau)=r\mid\lambda)=\\&\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{k}\binom{k}{j}k\exp\{-(n-k+j)\lambda t\}+\\&\sum_{k=r}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{k}\binom{k}{j}r\exp\{-(n-k+j)\lambda t\}.\end{aligned}\tag{4}$$

值得注意的是，混合试验中平均试验时间和平均试验总失效个数比定时试验和定数试验都小，这正是混合试验的优良特性.

3 参数的 Bayes 估计及其分布函数

下面定理描述了混合试验中参数的 Bayes 估计.

定理 1 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同服从于指数分布 $\exp(\lambda)$ 的随机变量，其中参数 λ 未知并有一个伽玛先验分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$. 那么基于混合试验的参数 λ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{M(\tau)+\alpha}{S_{M(\tau)}+\beta}.\tag{5}$$

平均寿命 $\theta=E(X\mid\lambda)$ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}=\frac{S_{M(\tau)}+\beta}{M(\tau)+\alpha},\tag{6}$$

其中 $S_{M(\tau)}=\sum_{i=1}^{M(\tau)}X_{(i)}+(n-M(\tau))\tau$ 表示试验总时间.

证明　利用混合试验的性质, 我们得到$(X_{(1)},\cdots,X_{M(\tau)};M(\tau)=m)$的联合密度函数

$$f(X_{(1)},\cdots,X_{(m)};m\mid\lambda)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-m)!}\lambda^{m}\exp\{-\lambda(\sum\limits_{i=1}^{m}X_{(i)}+(n-m)t)\}, \\ \qquad m=1,\cdots,r-1,\quad 0\le X_{(1)}\le\cdots\le X_{(m)}\le t, \\ \dfrac{n!}{(n-r)!}\lambda^{r}\exp\{-\lambda(\sum\limits_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)})\}, \qquad m=r, \\ \qquad 0\le X_{(1)}\le\cdots\le X_{(m)}\le t, \\ 0, \qquad m=r+1,\cdots,n.\end{cases}$$

因此, λ的后验密度函数为

$$f(\lambda\mid X_{(1)},\cdots,X_{(M(\tau))};M(\tau))=\frac{\lambda^{M(\tau)+\alpha-1}\exp\{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{M(\tau)}X_{(i)}+(n-M(\tau))\tau+\beta\}}{\int_0^{\infty}\lambda^{M(\tau)+\alpha-1}\exp\{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{M(\tau)}X_{(i)}+(n-M(\tau))\tau+\beta\}d\lambda}=$$

$$\frac{(S_{M(\tau)}+\beta)^{M(\tau)+\alpha}}{\Gamma(M(\tau)+\alpha)}\lambda^{M(\tau)+\alpha-1}\exp\{-\lambda(S_{M(\tau)}+\beta)\}.$$

故参数λ的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}=\int_0^{\infty}\frac{(S_{M(\tau)}+\beta)^{M(\tau)+\alpha}}{\Gamma(M(\tau)+\alpha)}\lambda^{M(\tau)+\alpha}\exp\{-\lambda(S_{M(\tau)}+\beta)\}d\lambda=\frac{M(\tau)+\alpha}{S_{M(\tau)}+\beta}.$$

其次, 平均寿命$\theta=E(X\mid\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$的 Bayes 估计为

$$\hat{E}(X\mid\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{(S_{M(\tau)}+\beta)^{M(\tau)+\alpha}}{\Gamma(M(\tau)+\alpha)}\lambda^{M(\tau)+\alpha-\tau}\exp\{-\lambda(S_{M(\tau)}+\beta)\}d\lambda=\frac{S_{M(\tau)}+\beta}{M(\tau)+\alpha}.$$

故定理 1 得证. 现我们进一步给出了 Bayes 估计的分布函数 .

定理 2　在定理 1 的条件下, 平均寿命的 Bayes 估计$\hat{\theta}$的分布函数为

$$P(\hat{\theta}<T)=\sum_{m=0}^{r-1}\left\{\begin{array}{l}0,\qquad T_m<(n-m)t, \\ \sum\limits_{j=0}^{[b_m]}(-1)^{j}\begin{pmatrix}m\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\ m\end{pmatrix}\exp\{-\lambda(n-m+j)t\}I_m(\lambda(b_m-j)t), \\ \qquad (n-m)t<T_m\le nt, \\ \sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{j}\begin{pmatrix}m\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\ m\end{pmatrix}\exp\{-\lambda(n-m+j)t\},\qquad nt<T_m,\end{array}\right\}+$$

$$\begin{cases}I_r(\lambda T_r),\qquad T_r<(n-r+1)t, \\ I_r(\lambda T)-\sum\limits_{j=0}^{[b_r]-1}(-1)^{j}\begin{pmatrix}r-1\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\ r-1\end{pmatrix}\exp\{-\lambda(n-r+1+j)t\} \\ \quad\dfrac{n-r+1}{n-r+1+j}I_r(\lambda(b_r-j-1)t), \\ \qquad (n-r+1)\le T_r<nt, \\ 1-\sum\limits_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\begin{pmatrix}r-1\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\ r-1\end{pmatrix}\exp\{-\lambda(n-r+1-j)t\}, \\ \qquad nt\le T_r,\end{cases}\tag{7}$$

其中 $b_m=mT_m/t-(n-m)$, $I_a(b)=\int_0^{b}u^{a-1}\exp\{-u\}du/\Gamma(a)$, 是不完全的伽玛函数, $T_m=(m$

$+\alpha)T-\beta$.

证明 由定理1,我们得平均寿命的Bayes估计为$\hat{\theta}=\frac{S_{m(\tau)}+\beta}{M(\tau)+\alpha}$.因此,其分布函数可写成

$$P(\hat{\theta}<T)=P(S_{m(\tau)}<(M(\tau)+\alpha)T-\beta)=$$
$$\sum_{m=0}^{r}P(S_{m(\tau)}<T_m,M(\tau)=m), \tag{8}$$

其中$T_m=(M(\tau)+\alpha)T-\beta, m=0,\cdots,r$.为了导出分布函数,首先我们考虑下列积分:

$$G_m(X,t)=\int\cdots\int_{0\le X_1\le\cdots\le X_m\le t,\ \sum_{i=1}^{m}X_i\le X}\lambda^m\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{m}X_i\}\mathrm{d}X_1\cdots\mathrm{d}X_m, \tag{9}$$

$$G_m(X,t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^m}{m!(m-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{[X/t]}\int_0^{X-jt}\binom{m}{j}(-1)^j u^{m-1}\exp(-\lambda(u+jt))du, & \\ \qquad 0<X\le mt, & \\ \dfrac{1}{m!}(1-\exp\{-\lambda t\})^m, & X>mt.\end{cases}$$

因此,对$m=0,\cdots,r-1$,我们得

$$P(S_{m(\tau)}<T_m,M(\tau)=m)=$$
$$\frac{n!}{(n-m)!}\int\cdots\int_{0\le X_1\le\cdots\le X_m\le t,\ S_{M(\tau)}<T_m}\lambda^m\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{m}X_i+(n-m)t\}\mathrm{d}X_1\cdots\mathrm{d}X_m=$$
$$\frac{n!m!}{(n-m)!}G_m(T_m-(n-m)t,t)=$$
$$\begin{cases}0, & T_m<(n-m)t,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{[b_m]}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{n}{m}\exp\{-\lambda(n-m+j)t\}I_m((b_m-j)t), & \\ \qquad 0<T_m\le mt, & \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{n}{m}\exp\{-\lambda(n-m+j)t\}, & nt<T^m.\end{cases} \tag{10}$$

另一方面,利用定理1的结果,可得

$$P(S_{m(\tau)}<T_r,M(\tau)=r)=$$
$$\begin{cases}I_r(\lambda T_r), & T_r<(n-r+1)t,\\ I_r(\lambda T)-\displaystyle\sum_{j=0}^{[b_r]-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\binom{n}{r-1}\exp\{-\lambda(n-r+1+j)t\} & \\ I_r(\lambda(b_r-j-1)t)\ \dfrac{n-r+1}{n-r+r+j}, & (n-r+1)\le T_r<nt,\\ 1-\displaystyle\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\binom{n}{r-1}\exp\{-\lambda(n-r+1-j)t\}, & \\ \qquad nt\le T_r. & \end{cases} \tag{11}$$

结合式(9),(10)和(11),我们证明了定理2.

特别地,当$T<[\{n-r+1)t+\beta]/(r+\alpha)$时,平均寿命的Bayes估计$\hat{\theta}$的分布函数正好是一个伽玛分布$\Gamma(r,(r+\alpha)\lambda)$.因此,定理2是伽玛分布的推广.如果试验是定数试验,那么

$$P(\hat{\theta} < T) = T_r(\lambda((m+\alpha)T-\beta)).$$

其次,如果试验是定时试验,那么 Bayes 估计的分布函数化为

$$P(\hat{\theta} < T) = \sum_{j=0}^{n}\begin{cases}\sum_{j=0}^{[b_m]}(-1)^j\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}\exp\{-\lambda(n-m+j)t\}I_m(\lambda(b_m-j)t), \\ \qquad\qquad (n-m)t < T_m \le nt, \\ \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}\exp\{-\lambda(n-m+j)t\}, \qquad nt < T_m.\end{cases}$$

另一方面,利用定理 2 和 Bayes 估计分布的单调性,我们可构造出平均寿命 θ 的置限下界. 给定信度 α, 设 $L(\theta)$ 是 θ 的函数, 使得:

$$\alpha = P(\hat{\theta} \ge L(\theta)).$$

那么

$$P(\hat{\theta} \ge L^{-1}(\theta)) = 1-\alpha.$$

故 $L^{-1}(\theta)$ 就是平均寿命 θ 的一个 $1-\alpha$ 置限下界.

参　考　文　献

1 Balakrishnan N, Asit P B. Exponential distribution: theory, methods and applications. Canada: Gordon and Breach Publishers, 1995. 186～210

2 Lam Y. An optimal single variable sampling plan with censoring. The Statistician, 1990, 39(1): 53～67

3 Lam Y. Bayesian variable sampling plans for the exponential distribution with type I censoring. Ann. Statist., 1994, 22(2): 696～711

4 Chen J W, Lam Y. Bayesian variable sampling plan for the weibull distribution with type I censoring. Acta Math. Appl. Sinica, 1999, (15): 23～30

Bayes Estimation of Parameters in Mixed Censoring and Its Distribution Function

Chen Jianwei

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract As the most useful inspection design in life analysis, the mixed censoring provides with more information than both Type Ⅰ and Type Ⅱ censoring. The author investigates here the Bayes estimation of exponentially distributed parameters in mixed censoring; and derives the distribution function of Bayes estimation.

Keywords mixed censoring, Bayes estimation, exponential distribution, distribution function of Bayes estimation