

耦合度的新定义及其应用^{*}

王永初 王启志

(华侨大学机电工程系, 泉州 362011)

摘要 耦合度是多变量间交互影响的一种度量, 这种影响会导致系统品质下降. 如何表征耦合是解耦控制的核心问题. Bristol 提出相对放大系数方法, Rosenbrock 也提出一种判断系数耦合度的方法, 但这些方法无法真正反映系统的耦合度. 根据支路控制能力同其他干涉能力的一种特殊比值, 提出系统耦合度的新定义. 利用分离支路最大耦合度的逐次分离方法, 将一个强耦合系统演变成一个松散耦合的系统, 并讨论耦合度转换成相对放大系数的条件. 采用若干例子来解释这种新耦合度的工程应用; 通过仿真实验, 证实其在解耦系统中对改善控制品有显著的效果.

关键词 系统耦合度, 相对放大系数, 解耦控制, 多变量控制

分类号 TP 273.2

判断耦合系统的耦合程序、耦合网络的支路耦合的严重性和弱化系统的耦合度分离效果, 都涉及系统(或支路)的耦合度. 尽管解耦系统研究已有相当长的时间, 但是对耦合度的研究尚未达到令人满意的程度. 迄今为止, 与此问题有关的研究成果, 有 Rosenbrock 的对角优势矩阵方法^[1]和 Bristol 的相对放大系数方法^[2]. 前者, 不需解耦系统仍有较好的调节性能, 但并未说明系统耦合的程度. 后者指出 $[X_i, U_j]$ 无耦合影响的条件是 $\lambda_{ij} = 1$, λ_{ij} 偏离1的距离愈大, $[X_i, U_j]$ 配对受其它支路的耦合影响就愈大. 然而, 实际情况是 λ_{ij} 为负值时, 其耦合的影响远远超过 $\lambda_{ij} \gg 1$ 的影响, 作为系统耦合度的数量度量, 这种方法是有点缺点的^[3,4].

1 系统与支路的耦合度

分析 Rosenbrock 与 Bristol 这两种方法, 可以看出其定义的耦合度, 实质上是一种控制能力的表征方法. 它是由 U_j 控制 X_i 通过支路 $G_{ij}(s)$ 直接影响的量, 以及由 U_j 经其他耦合支路综合影响 X_i 的量之间的关系. 图1所示, 它是以 λ_{11} 为例子的实验图. 图中的对象 $G(s)$ 划分成4个部分, 即

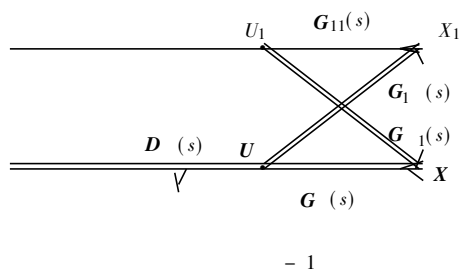


图1 λ_{11} 的实验流程图

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} G_{11}(s) & G_1(s) \\ \hline G_{-1}(s) & G(s) \end{array} \right], \quad (1)$$

$G_{11}(s)$ 为 $[X_1, U_1]$ 控制支路, $G_1(s) = [G_{12}(s), G_{13}(s), \dots, G_{1n}(s)]$, $G_{-1}(s) = [G_{21}(s), G_{31}(s), \dots, G_{n1}(s)]$, $X(s) = [X_2(s), X_3(s), \dots, X_n(s)]^T$, $U = [U_2(s), U_3(s), \dots, U_n(s)]^T$, 且

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{22}(s) & G_{23}(s) & \dots & G_{2n}(s) \\ G_{32}(s) & G_{33}(s) & \dots & G_{3n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n2}(s) & G_{n3}(s) & \dots & G_{nn}(s) \end{bmatrix}.$$

由 U_1 通过反馈控制回路对 X_1 的影响为

$$X_1(s) = G_1(s)D(s)[I + D(s)G(s)]^{-1}G_{-1}(s)^T U_1(s) = G_1(s)G(s)^{-1}H(s)G_{-1}(s)^T U_1(s), \quad (2)$$

式中 $H(s)$ 为 X 与 U 的闭环传递函数矩阵, 即

$$H(s) = G(s)D(s)[I + G(s)D(s)]^{-1}.$$

根据 λ 的定义, $\Delta\zeta_1^{(2)}$ 是在 X 恒定的条件下得出的. 这意味着, $[X, U]$ 配对系统属于完全控制(至少是近乎完全控制). 故可设 $H(s) = I$, 因此有 $X_1(s) = G_1(s)G(s)^{-1}G_{-1}(s)^T U_1(s)$. U_1 对 X_1 的静态增益有两个部分: 一部分为无耦合时 U_1 对 X_1 的静态增益; 另一部分则为通过反馈耦合部分的静态增益, 即

$$\Delta\zeta_1^{(2)} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{11}(s) + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G(s)^{-1}G_{-1}(s)^T = k_{11} + K_1 K^{-1} K_{-1}^T.$$

其中 K_1, K, K_{-1} 分别 $G_1(s), G(s)$ 和 $G_{-1}(s)$ 对应的静态增益向量或矩阵, 即

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \left[\begin{array}{c|c} \lim_{s \rightarrow 0} G_{11}(s) & \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s) \\ \hline \lim_{s \rightarrow 0} G_{-1}(s) & \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} k_{11}(s) & K_1(s) \\ \hline K_{-1}(s) & K(s) \end{array} \right]. \quad (3)$$

将 $[X_1, U_1]$ 支路的耦合度定义为 $P_{11} = K_1 K^{-1} K_{-1}^T k_{11}^{-1}$, 而 $[X_i, U_j]$ 的耦合度则为

$$P_{ij} = K_i K_p^{-1} K_j^T k_{ij}^{-1}.$$

其中 K_p 为矩阵 K 划去第 i 行与第 j 列后, 余下元素按原顺序排列的矩阵; K_i 为矩阵第 i 行向量划去元素 k_{ij} 后, 按原顺序排列的行向量; K_j 为矩阵第 j 列向量划去 k_{ij} 后, 余下元素按原顺序排列的列向量的转置.

证明 根据相对放大系数的定义, 可得到

$$\lambda_{ij} = \frac{\Delta\zeta_1^{(1)}}{\Delta\zeta_1^{(2)}} = \frac{k_{ij}}{k_{ij} + K_i^T K_p^{-1} K_j},$$

也即

$$\frac{1}{\lambda_{ij}} = 1 + K_i^T K_p^{-1} K_j k_{ij}^{-1} = 1 + P_{ij}.$$

因此, 可证得支路耦合度与支路相对放大系数的关系为

$$P_{ij} = |1/\lambda_{ij} - 1|. \quad (4)$$

$= 0 \sim 1$. P_{ij} 方法还可以推广到动态耦合度. 当 $H(s) = I, H_{ij}(s) = 1$ 时, 则

$$P_{ij}(\omega) = G_i(\omega) G_p(\omega)^{-1} G_j(\omega)^T G_g(\omega)^{-1}, \quad \forall \omega \quad (5)$$

支路最大动态耦合度

$$\max P_{ij}(\omega) = P_{ij} = \max G_i G_p^{-1} G_j / \min G_{ij}, \quad \forall \omega \quad (6)$$

对于过程控制系统对象特征性, 最常见的是 $G_{ij}(\omega) = k_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $\forall \omega$ 故有

$$\max P_{ij}(\omega) = K_i K_p^{-1} K_j^T k_{ij}^{-1}. \quad (7)$$

因此, 式(4)或式(9)可用于表征支路耦合度. 若依照 $\max P_{ij}(\omega)$ 最小选择 $[X_i, M_j]$ 配对, 则

$$[X_i, M_j] = \min \{ \max P_{ij}(\omega) \}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad \forall \omega$$

系统耦合度则可定义为所有配对支路耦合度的总和, 即

$$\eta = \sum \min \max P_{ij}(\omega), \quad \forall \omega$$

例如, 4 个对象相对放大系数矩阵 λ 分别为

$$\begin{aligned} (1) \lambda &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, & (2) \lambda &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \\ (3) \lambda &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, & (4) \lambda &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其对应的 P 矩阵为

$$\begin{aligned} (1) P &= \begin{bmatrix} 0.11 & 9 \\ 9 & 0.11 \end{bmatrix}, & (2) P &= \begin{bmatrix} 0.67 & 1.5 \\ 1.5 & 0.67 \end{bmatrix}, \\ (3) P &= \begin{bmatrix} 1 & 2.3 & 4 \\ 4 & 1.5 & 1.5 \\ 2.3 & 2.3 & 1.5 \end{bmatrix}, & (4) P &= \begin{bmatrix} 0.43 & 9 & 4 \\ 4 & 0.67 & 4 \\ 9 & 2.3 & 0.67 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

对象(1)和(2)为 2×2 对象, 前者 $\eta = 0.22$ 比后者的 $\eta = 1.34$ 低得多. 因此, 对象(1)的系统耦合度小. 同理, 对象(4)的耦合度 $\eta = 2.01$ 比对象(3)的 $\eta = 4$ 低, 因此对象(4)的系统耦合度比对象(3)的耦合度小. 由于支路耦合度对角配对最小, 说明原来系统被控制变量与控制输入变量的配对选择是正确的.

2 弱化系统耦合度的应用

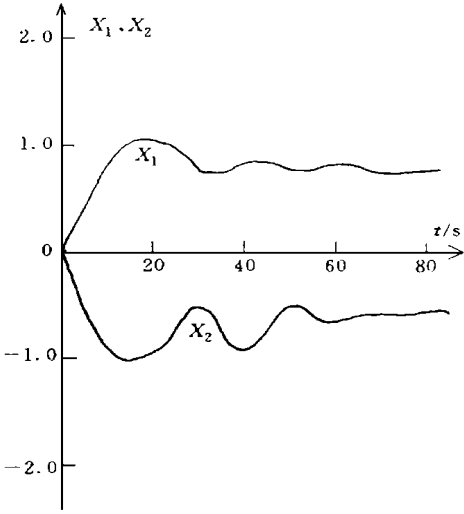
这里以一个工程配料系统为例, 对象特性为

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10.1s + 1} & \frac{0.42}{10.1s + 1} \\ -\frac{2.83}{(10.1s + 1)(10s + 1)} & \frac{2.77}{(10.1s + 1)(10s + 1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \end{bmatrix},$$

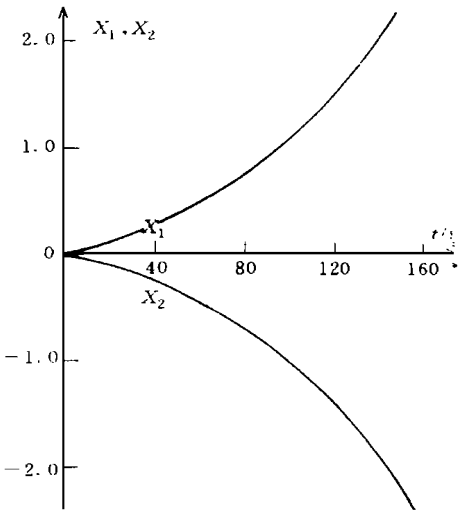
求得 $K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \left[\begin{array}{c|c} G_{11}(s) & G_1(s) \\ \hline G_{-1}(s) & G(s) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0.42 \\ \hline -2.83 & 2.77 \end{array} \right]$, $P = \begin{bmatrix} 0.43 & 2.33 \\ 2.33 & 0.43 \end{bmatrix}$. P_{11} 与 P_{22} 的支路耦合度最小, 因此 $[X_1, M_1]$ 与 $[X_2, M_2]$ 配对控制的选择合适. 在两个控制回路中, 分别采用

PI 调节器 $D(s) = K \left(1 + \frac{1}{Ts} \right)$. 在 $K = 2$, $T = 10$ s 的参数设置下, X_1 与 X_2 系统的响应变化

如图 2(a) 所示. 如果选择 $[X_1, M_2]$ 与 $[X_2, M_1]$ 配对, 则在同样的 PI 调节器的控制下, 其阶路响应调节曲线是发散的, 如图 2(b) 所示. 该系统的耦合度在 X_1 与 M_1, X_2 与 M_2 配对场合下, $\eta = P_{11} + P_{22} = 0.86$. 这说明该系统的耦合度较大, 解耦可以进一步提高系统的控制品质.



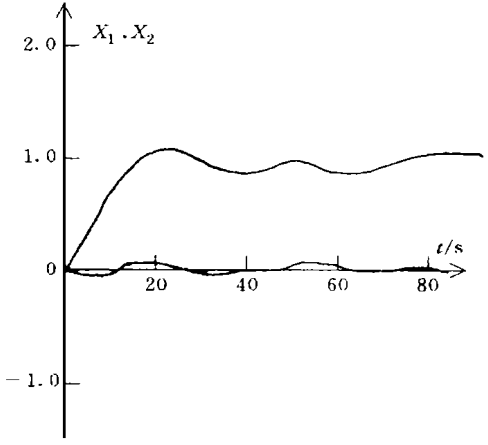
(a)



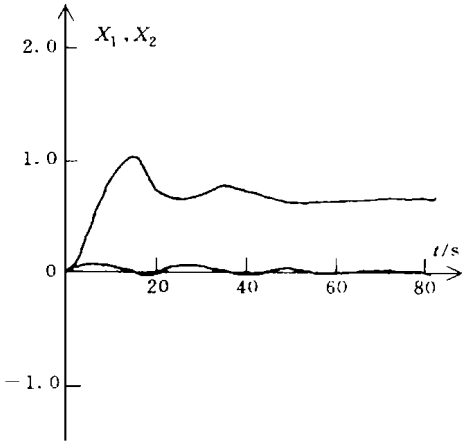
(b)

图 2 不同配对的系统响应

提高系统质量的一种办法, 是前置部分支路解耦网络. 如在 $G(s)$ 前设置一个 $L(s)$ 网络. $L(s) = \begin{bmatrix} 1 & -0.42 \\ -0.98 & 1 \end{bmatrix}$, 则对应 X_1 与 X_2 的给定值加入单位阶路扰动, 分别得到如图 3 所示的响应曲线.



(a) $X_1 = 1/s, X_2 = 0$



(b) $X_1 = 0, X_2 = 1/s$

图 3 弱化耦合度后的系统响应

在控制系统的构成中, 控制器采用 $D(s) = \text{diag}\{D_i(s)\}$, $D_1(s) = 2(1 + 1/10s)$, $D_2(s) = -2(1 + 1/10s)$. 由弱化耦合度前后的系统响应曲线可以看出, 弱化前由于两个子系统间的耦合使

系统呈不稳定响应. 弱化后, 虽然两个子系统间的耦合现象还存在, 但已减少到不影响系统的各自正常运行.

4 结束语

一个耦合系统通过完全解耦, 可以使整体控制系统的调节器品质大大提高, 但付出的代价太大. 寻找简单又保证工程对系统设计的要求, 一次或两次降低系统耦合度, 就可得到一个符合要求的解耦控制系统. 本文采用的耦合度的实质是控制能力的度量, 它同传统的相对放大系统有本质的联系, 这是本文揭示的一个重要结果. 耦合度弱化方法在控制工程中有较广泛应用.

参 考 文 献

- 1 王永初. 解耦控制系统. 成都: 四川科技出版社, 1986. 293 ~ 330
- 2 Bristol E H. On a new measure of interaction for multivariable process control. IEEE. T., 1966, (A-C): 112 ~ 125
- 3 Raman K V. Model decoupling insensitivity using output feedback. IEEE. T., 1987, (A-C): 524 ~ 526
- 4 Ailon A. Decoupling of square singular system by proportional state feedback. IEEE. T., 1991, (A-C): 95 ~ 102

New Definition of Coupling Degree and Its Application

Wang Yongchu Wang Qizhi

(Dept. of Electromech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Based on a specific ratio of the control ability of a branch or shunt to the interference abilities from other branches or shunts, a new definition is given to the coupling degree of a system. By making use of the method of stepwisely separation which separates maximal coupling degree of a branch or shunt, a seriously coupled system can be evolved into a loosely coupled system. The conditions under which the coupling degree transferred into relative magnification coefficient are discussed. The engineering application of this new definition of coupling examples; its remarkable effect of improving control sample in decoding system is proved by simulation experiment. Coupling degree is a measure of reciprocal effect between multivariables. This effect will lead to quality decrease of the system. How to characterize the coupling is the crux of decoupling control. The method of relative magnification coefficient as proposed by Bristol and the method for judging coupling degree of coefficients as proposed by Rosenbrock are unable to reflect coupling degree of the system really.

Keywords coupling degree of system, relative magnification coefficient, decoupling control, multivariate control