第 20 卷　第 3 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 20　No. 3
1999 年 7 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jul. 1999

一种求解对流占优方程的内插小波方法*

张　新　红

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　采用内插小波方法数值求解对流占优方程. 提出通过变换去掉对流项, 在此基础上利用紧支集 Daubechies 尺度函数的自相关函数作内插基求解线性对流占优方程, 讨论了刚度矩阵的特性及计算方法, 最后给出一个数值例子.

关键词　紧支集正交小波, 对流占优方程, 内插基

分类号　O 241.82

考虑常系数对流占优方程

$$\left.\begin{aligned} &-\epsilon u''+pu'+qu=f(x) \qquad (0<x<1),\\ &u(0)=0,\ u(1)=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 $\epsilon>0$ 是小参数, p, q 是常数, 且对流系数 p 远远大于扩散系数 ϵ. 方程(1) 的形式虽然简单, 但由于对流系数远远大于扩散系数, 因此在边界附近解的变化速率很大. 用通常的数值方法(如中心差分或 Galerkin 有限元方法) 求解, 常出现数值求解难的问题. 特别在参数 ϵ 十分小的情况下要达到必要的精度须要求网格步长很小, 这不仅难以实现预计精度, 而且数值稳定性差. 本文给出一种数值求解方程(1) 的内插小波方法, 讨论了刚度矩阵的特性及计算问题. 最后, 给出一个数值实验.

1　紧支集正交小波及其自相关函数

空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中的多分辨分析, 是指 $L^2(\mathbf{R})$ 中满足如下条件的一个闭子空间序列[1]. (1) 一致单调性为 $\cdots V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$. (2) 渐近完全性为 $\overline{\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}}V_j=\{0\}$, $\overline{\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}}V_j=L^2(\mathbf{R})$. (3) 伸缩规则性为 $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$, $(\forall j\in\mathbf{Z})$. (4) Riesz 基存在性. 存在 $\varphi\in V_0$, 使得 $\{\varphi(x-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 V_0 的 Riesz 基. 而且存在紧支集函数 $\varphi(x)$, 使得 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 V_0 的标准正交集, 其中 $\varphi(x)$ 称为尺度函数. 我们还可以把 V_{j+1} 分解为 $V_{j+1}=V_j+W_j$, 其中 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间, 并且存在紧支集函数 $\psi(x)$, 使得 $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 W_0 的标准正交基, 称 $\psi(x)$ 为小波函数. 用 $[0,L]$ 统一表示 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的支集. 我们将给出的内插小波方法, 是基于尺度函数 $\varphi(x)$ 的自相关函数 $\theta(x)$ 的使用[2]. 在此, 先简单介绍 $\theta(x)$ 的定义及一些性质.

定义 1　令 $\varphi(x)$ 是标准正交的具有紧支集的尺度函数, 则 $\varphi(x)$ 的自相关函数定义为:

*　本文 1998-12-16 收到

$\theta(x) = (\varphi * \varphi(-\ \cdot))(x) = \int \varphi(t)\varphi(t-x)\,\mathrm{d}t$, 其中 $*$ 指卷积运算. 若 $\theta_{j,k} = 2^{j/2}\theta(2^j x - k)$, $V_j = \overline{\mathrm{span}\{\theta(2^j x - k), k\in \mathbf{Z}\}}$, 则 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 形成一多分辨分析, 称 $\theta(x)$ 为该多分辨分析的尺度函数.

下面介绍 $\theta(x)$ 的一些性质[2,3]. 由于 $\varphi(x)$ 的标准正交性, $\theta(x)$ 具有内插基函数的性质. 即 $\theta(0) = \int \varphi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\theta(n) = \int \varphi(x)\varphi(x-n)\,\mathrm{d}x = 0$, $(n\neq 0)$.

$\theta(x)$ 满足双尺度方程 $\theta(n) = \sum_{n=0}^{L-1} a_n\theta(2x-n)$, a_i 是 $\theta(x)$ 的传递系数. 它满足 $a_n = 2\sum_{j=0}^{L-1-n} h_j h_{j+n}$, $n = 1, 2, \cdots, L-1$, $a_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \cdots, L/2-1$, 其中 h_j 是 $\varphi(x)$ 的传递系数.

$\theta(x)$ 是紧支集函数, 其支集为 $[-L+1, L-1]$.

2　内插小波方法

在方程(1)中, 对流系数 p 远远大于扩散系数 ϵ, 因此扩散项 $-\epsilon u''$ 被隐没. 我们通过变换 $v = u\mathrm{e}^{-\frac{px}{2\epsilon}}$, 将原方程(1)化为

$$\left.\begin{aligned} &-v'' + \left(\frac{p^2}{4\epsilon^2} + \frac{q}{\epsilon}\right)v = \frac{1}{\epsilon}\mathrm{e}^{-\frac{px}{2\epsilon}}f(x) \qquad (0 < x < 1), \\ &v(0) = v(1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

方程(2)不含对流项 v', 且为椭圆型方程, 对称. 但是由于 v 的系数很大, 若用通常的数值方法求解, 仍难以体现出扩散项 v''. 下面我们用内插小波方法来求解方程(2). 首先定义一内插运算 $I_j: H^s(\mathbf{R}) \to V_j$, 使得 $I_j(u) = \sum_k u(2^{-j}k)\theta(2^j x - k)$. 那么, 我们有下列误差估计

引理 **1**　让 $0 \le r \le s \le 2M-1$, $s \ge 1$, $u \in H^s(\mathbf{R})$, 则 $\| u - I_j u \|_r \le C2^{-j(s-r)}\| u \|_s$.

方程(2)作离散, 将区间 $[0,1]$ 划分为 2^j 等份, $\forall\, x_k = k2^{-j}$, $k \in A = \{0, 1\cdots, 2^j\}$. 取内插函数空间 $V_j = \overline{\mathrm{span}\{\theta(2^j x - k), k\in\mathbf{Z}\}}$, 则存在 $\{C_k\}_{k\in\mathbf{Z}} \in l^2$, 使得 $v_j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} C_k\theta(2^j x - k)$. 由 $\theta(x)$ 的内插性质, 可得 $C_k = v_j(x_k)$. 因此, 我们寻求的近似解具有的形式为 $v_j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} v_j(x_k)\theta(2^j x - k)$, 只需计算 v_j 在节点 $x_k = k2^{-j}$ 的值即可. 对于方程(2)的边值问题, 特别选取的基函数为 $\tilde{\theta}_{j,0} = \sum_{k=-\infty}^{0}\theta_{j,k}$, $\tilde{\theta}_{j,2^j} = \sum_{k=2^j}^{+\infty}\theta_{j,k}$. 因此, 方程(2)的近似解 v_j 可表为 $v_j = v_j(0)\tilde{\theta}_{j,0} + \sum_{k=1}^{2^j-1} v_j(x_k)\theta(2^j x - k) + v_j(1)\tilde{\theta}_{j,2^j}$, 且满足边值条件 $v_j(0) = 0$, $v_j(1) = 0$. 因此可得

$$v_j = \sum_{k=1}^{2^j-1} v_j(x_k)\theta(2^j x - k). \tag{3}$$

将式(3)代入方程(2), 得

$$\sum_{k=1}^{2^j-1} v_j(x_k)\theta\left[-2^{2j}\theta''\left(2^j\frac{n}{2^j} - k\right) + \left(\frac{p^2}{4\epsilon^2} + \frac{q}{\epsilon}\right)\theta\left(2^j\frac{n}{2^j} - k\right)\right] =$$

$$\frac{1}{\epsilon}\mathrm{e}^{-\frac{px_n}{2\epsilon}}f(x_n) \qquad n = 1, 2\cdots, 2^j - 1. \tag{4}$$

为计算方便, 在方程(4)的两边乘以一个常数因子 2^{-2j}, 并观察到 $(2^{-2j})/\epsilon = \mathrm{e}^{-2j\ln 2 - \ln\epsilon}$. 因此, 式(4)可写为

$$\sum_{k=1}^{2^j-1} v_j(x_k)\left[-\theta''(n-k) + \alpha\theta(n-k)\right] = \mathrm{e}^{-\frac{px_n}{2\epsilon} - 2j\ln 2 - \ln\epsilon}f(x_n), \tag{5}$$

其中常数 $a=2^{-2j}(p^2/4\epsilon^2+q/\epsilon)$．式(5)也可以写成矩阵形式 $\boldsymbol{MV}=\boldsymbol{F}$，其中 $\boldsymbol{M}$ 为刚度矩阵，$\boldsymbol{V}$ 为解向量，$\boldsymbol{F}$ 为右端向量．解方程组(5)，求出 v_j 在节点 $x_n=n2^{-j}$ 处的值．作反变换 $u=ve^{\frac{px}{2\epsilon}}$，求出方程(1)的近似解．

3 刚度阵的特性及计算方法

在用内插小波方法求解方程(2)时，关键是方程组(5)中刚度阵 $\boldsymbol{M}$ 是否有有界的条件数，其结构是否简单．本节我们来分析用内插小波方法求解方程(2)时，所得刚度阵的元素分布及特性．首先分析矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的结构．由 $\theta(x)$ 的内插性质可得在刚度阵中，对角线上的元素为 $m_{k,k}=-\theta''(0)+a$, $k=1,2,\cdots,2^j-1$；非对角线元素为 $m_{k,n}=-\theta''(n-k)$, $k,n=1,2,\cdots,2^j-1$, $n\neq k$．又由 $\theta''(x)$ 的对称性及 $\theta(x)$ 的紧支性，得到矩阵 $\boldsymbol{M}$ 具有的形式为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} -\theta''(0)+a & -\theta''(1) & -\theta''(2) & \cdots & -\theta''(L-2) & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta''(1) & -\theta''(0)+a & -\theta''(1) & \cdots & -\theta''(L-3) & -\theta''(L-2) & \cdots & 0 \\ -\theta''(2) & -\theta''(1) & -\theta''(0)+a & \cdots & -\theta''(L-4) & -\theta''(L-3) & \cdots & 0 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

因此，$\boldsymbol{M}$ 为稀疏的对称托伯利兹(Toeplitz)矩阵，且结构简单．

如果对矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的元素，应用 $\theta(x)$ 的导数由微分的卷积来计算并作变量变换，可以得到

$$m_{k,n}=-\int_{\mathbf{R}}\varphi'_{j,n}\varphi'_{j,k}\mathrm{d}x+a\int_{\mathbf{R}}\varphi_{j,n}\varphi_{j,k}\mathrm{d}x.$$

可以看到，应用内插小波方法求解方程(1)，所得的刚度阵与用尺度函数 $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 作为检验函数和允许函数类的小波 Galerkin 方法有相同的刚度阵．对于右端项，仅计算右端函数在节点处的值．因此采用内插小波方法，它不仅能够应用小波 Galerkin 方法中所发展起来的预条件技术和矩阵压缩技术，并且减少了右端项和小波函数的内积运算，这就使得计算量大大减少．况且，$\boldsymbol{M}$ 只含有 $\theta(x)$ 的二阶导数在正整节点和零处的值，在文[2]中已给出了紧支集 Daubechies 尺度函数的自相关函数的一、二阶导数在正整节点值的数据表．通过查表，可以方便地计算出矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的元素．求解方程组(5)的方法很多，可以利用小波 Galerkin 方法中讨论的矩阵压缩技术求解，也可以利用求解对称托伯利兹矩阵的列文逊(Levinson)方法求解．

4 数值实验及与差分法的比较

应用内插小波方法具体求解对流占优方程：

$$\left.\begin{aligned} &-\epsilon u''+u'+u=1 \quad (0<x<1), \\ &u(0)=u(1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

问题(7)的准确解为 $u(x)=\dfrac{1-e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2}-e^{\lambda_1}}e^{\lambda_1 x}+\dfrac{e^{\lambda_1}-1}{e^{\lambda_2}-e^{\lambda_1}}e^{\lambda_2 x}+1$，其中特征值为 $\lambda_1=(1+\sqrt{1+4\epsilon})/2\epsilon$, $\lambda_2=(1-\sqrt{1+4\epsilon})/2\epsilon$. 方程(7)在 $x=1$ 附近产生边界层．

选取 Daubechies 尺度函数的自相关函数 $\theta(x)$ 作为内插基，用内插小波方法求解方程(7)．分别取 $\epsilon=0.1, 0.01, 0.001$, $j=6$ 时，其精确解和近似解的计算结果和误差见表1，误差1是逐点误差．利用中心差分来求解方程(7)，仍然取 $\epsilon=0.1, 0.01, 0.001$, $j=6$，其近似解与精确解

的逐点误差 2 也见表 1.

表 1 方程(7)的解及误差比较

坐标 x	内插近似解	精确解	误差 1	误差 2
		$\epsilon=0.1$		
≤0.90			$\le 10^{-3}$	≤0.2
0.953 125	2.143 380e-01	2.227 253e-01	8.387 267e-03	1.111 931e-01
0.968 750	1.521 592e-01	1.617 771e-01	9.617 872e-03	8.075 429e-02
0.984 375	7.469 838e-02	8.830 602e-02	1.360 764e-02	4.407 330e-02
		$\epsilon=0.01$		
≤0.90			$\le 10^{-3}$	≤0.3
0.953 125	6.027 793e-01	6.053 201e-01	2.540 781e-03	3.004 600e-01
0.968 750	5.833 952e-01	5.900 476e-01	6.652 432e-03	2.862 395e-01
0.984 375	4.510 387e-01	4.029 860e-02	4.194 724e-02	2.196 401e-01
		$\epsilon=0.001$		
≤0.90			$\le 10^{-2}$	≤0.493
0.953 125	6.039 132e-01	6.140 988e-01	1.018 557e-03	1.678 075e-01
0.968 750	6.102 025e-01	6.200 757e-01	9.873 205e-03	4.930 088e-01
0.984 375	6.159 242e-01	6.259 599e-02	1.003 569e-02	7.258 662e-02

从计算结果来看, 对于参数 ϵ 取小值时, 用中心差分计算所得的结果精度很差, 边界附近无法描述; 而用内插小波方法计算, 在边界附近描述效果非常好, 而且很好地再现了方程解对扩散系数 ϵ 的依赖性.

参 考 文 献

1 崔景泰. 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1995. 160～171

2 Beylkin G. Multresolution representation using the autocorrelation functions of compactly supported wavelets. IEEE Transctions on Singnal Processing, 1993, 41(12): 3 584～3 600

3 张新红. 紧支集正交小波的自相关函数及其导数计算. 河南师范大学学报(自然科学版), 1997, 25(4): 21～25

A Method of Interpolation Wavelet for Solving Convection-Dominated Equation

Zhang Xinhong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A method of interpolation wavelet is adopted for solving convection-dominated equation numerically. As a basis, the term of convection is deleted by conversion. The linear convection-dominated equation is soluted by using the autocorrelation of Daubechies compactly supported scaling function as interpolation basis. The characteristics of stiffness matrix and the method of its computation are discussed; and a numerical example is given finally.

Keywords compactly supported orthogonal wavelet, convection-dominated equation, interpolation basis