第20卷 第3期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol.20 No.3
1999年7月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jul. 1999

Weibull 分布恒加寿命试验混合数据分析*

吴 绍 敏

(华侨大学管理科学系, 泉州 362011)

摘要　对 Weibull 分布场合, 排除形状参数与加速应力无关的限制; 对恒加应力寿命试验的混合数据, 建立一种可靠性统计分析方法. 给出在正常应力水平下寿命分布的参数、平均寿命及变异系数的估计.

关键词　Weibull 分布, 恒加应力寿命试验, 混合数据
分类号　O 213.2

1　问题的提出

问题 1　加速寿命试验的可靠性统计分析, 一般作如下 Ⅰ～Ⅲ的假定[1]. (1) 假定Ⅰ. 产品在应力水平 $S_1< S_2< S_3< \cdots< S_k$ 的加速条件下, 其寿命分布类型与正常应力水平 S_0 条件下的寿命分布类型相同, 即 $T_i \sim F(\frac{t-\mu_i}{\sigma_i})(i=\overline{0,k})$. (2) 假定Ⅱ. $\sigma_0=\sigma_1=\cdots=\sigma_k$, 即形状参数与应力变化无关. (3) 假定Ⅲ. 位置参数 μ 与所加应力 S 的关系, 有 $\mu=a+b\varphi(s)$, 其中 $\varphi(s)$ 是应力 S 的某已知函数. 假定Ⅰ是有道理的, 因加速寿命试验时, 选择的应力水平必须保持 "失效机理不变", 否则无法进行分析. 假定Ⅲ是由试验总结出来的统计模型, 有根据. 假定Ⅱ似乎根据不足, 因在应力水平 $S_i(i=\overline{1,k})$ 上产品的寿命 $T_i \sim F(\frac{t-\mu_i}{\sigma_i})$, 当 $i\neq j$ 时 $T_i\neq T_j$, 就该有 $\mu_i\neq\mu_j$, $\sigma_i\neq\sigma_j$, 故 σ 与应力的变化不会无关.

问题 2　几乎所有的书籍和文献, 都是介绍图分析法、CLUE 及 BLUE 法. 这三种方法计算麻烦且要查许多数值表, 分析出来的结论误差较大又难以推广应用. 本文将排除假定Ⅱ, 应用最大似然估计法, 在恒加应力试验下, 对 Weibull 分布进行统计分析, 方法简单、精度高.

表 1　试验数据表

应力水平	样品量	失效数	失效时间	截止时间
S_1	n_1	$r_1=0$		T_1^*
S_2	n_2	r_2	$t_{21}t_{22}t_{23}\cdots t_{2r_2}$	T_2^*
S_i	n_i	r_i	$t_{i1}t_{i2}\cdots t_{ir_i}$	T_i^*
S_k	n_k	r_k	$t_{k1}t_{k2}\cdots t_{kr_k}$	T_k^*

问题 3　因科技不断发展, 产品质量不断提高且寿命愈来愈长, 为获得其失效数据, 需采用恒加应力寿命试验方法. 即选择比正常应力水平 S_0 较高的 k 个应力水平 $S_0< S_1< \cdots< S_k$, 在 S_i 上投

* 本文 1999-01-09 收到; 福建省自然科学基金资助项目

放 n_i 个样品试验($i=\overline{1,k}$). 但是如表 1 所示, 由于产品的质量高或选择的应力 S_1 太低, 可能出现表中获得的试验结果.

表 1 中有无失效数据(n_1, T_1^*) 和失效数据 $t_{i1}t_{i2}\cdots t_{ir_i}$($i=\overline{2,k}$), 称为混合数据. 本文将提出一种方法, 可对混合数据进行可靠性统计分析.

2 引理与假定

引理 **1** 设 $T\sim F_w(t)=1-\exp\{-(\frac{t}{\eta})^m\}$, 则

$$x=T^m\sim E(\lambda)=1-\exp(-\lambda x),$$

其中 $\lambda=1/\eta^m$ 是失效率, $\theta=\eta^m$ 是平均寿命.

证明 $P(X\le x)=P(T^m\le x)=P(T\le x^{1/m})=F_w(x^{1/m})=1-\exp\{-(\frac{x^{1/m}}{\eta})^m\}=1-\exp\{-(\frac{x}{\eta^m})\}=1-\exp\{-\lambda x\}$.

假定Ⅰ 在正常应力水平 S_0 及加速应力水平 $S_1<S_2<\cdots<S_k$ 下, 产品寿命 $T_i\sim F_i(t)=1-\exp\{-(\frac{t}{\eta_i})^{m_i}\}=W(m_i\eta_i,t)$, $t\ge 0$($i=\overline{0,k}$), 其中 $m_i>0$ 是形状参数, $\eta_i>0$ 是特征寿命. 由引理知指数分布满足 $\ln\theta=a+b\varphi(s)$, 故可得

假定Ⅱ 若 $T\sim W(m,\eta,t)$, 则

$$\ln\theta=a+b\varphi(s),\qquad \theta=\eta^m. \tag{1}$$

当 $m=1$ 时, $T\sim W(1,\eta,t)$, 则

$$\ln\eta=a_1+b_1\varphi(s), \tag{2}$$

其中 $\varphi(s)$ 为应力 S 的已知函数. 式(1), (2) 是两个统计模型. m 与 η 都与应力 S 的变化有关.

3 参数的最大似然估计

本节讨论 Weibull 分布, 在各加速应力水平上的参数 m_i,η_i 的最大似然估计.

定理 **1** m_i,η_i 的最大似然估计由方程组

$$\ln\eta_i=\frac{1}{m_i}\{\ln[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n_i-r_i)(T_i^*)^{m_i}]-\ln r_i\} \tag{3}$$

与

$$\frac{1}{m_i}=-\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}+\frac{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij}+(n_i-r_i)(T_i^*)^{m_i})\ln T_i^*}{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n_i-r_i)(T_i^*)^{m_i}} \tag{4}$$

确定, 其中 t_{ij}($j=\overline{1,r_i}$, $i=\overline{1,k}$) 为各个应力水平 S_i 上的失效数据, T_i^* 为 S_i 上的试验截止时间. 当定时截尾时, T_i^* 为截尾时间; 当定数截尾时, $T_i^*=t_{ir_i}$($i=\overline{1,k}$).

证明 设在每一水平上的试验数据为 S_i: $t_{i1}t_{i2}\cdots t_{ir_i}, T_i^*$ ($i=\overline{1,k}$), 则似然函数为

$$L(m_i,\eta_i: t_{i1}\cdots t_{ir_i}T_i^*)=C\prod_{j=1}^{r_i}\frac{m_i}{\eta_i}(\frac{t_{ij}}{\eta_i})^{m_i-1}e^{-(\frac{t_{ij}}{\eta_i})^{m_i}}e^{-(n_i-r_i)(\frac{T_i^*}{\eta_i})^{m_i}}=$$

$$C(\frac{m_i}{\eta_i})^{r_i}\prod_{j=1}^{r_i}(\frac{t_{ij}}{\eta_i})^{m_i-1}e^{-[(\frac{t_{ij}}{\eta_i})^{m_i}+(n_i-r_i)(\frac{T_i^*}{\eta_i})^{m_i}]},$$

$$\ln L = r_i(\ln m_i - \ln\eta) + \sum_{j=1}^{r_i}(m_i - 1)[\ln t_{ij} - \ln\eta_i] -$$
$$\eta_i^{-m_i}\Big[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\Big] + C.$$

$\partial\ln L/\partial\eta_i = 0$, 可得　下式或式(5), 即

$$\eta_i^{m_i} = \frac{1}{r_i}\Big[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\Big],$$

$$\ln\eta_i = \frac{1}{m_i}\Big\{\ln\Big[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\Big] - \ln r_i\Big\}. \tag{5}$$

$\partial\ln L/\partial m_i = 0$, 则得

$$\frac{r_i}{m_i} - r_i\ln\eta_i + \sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} - \eta_i^{-m_i}\Big[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\ln T_i^* +$$
$$\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\Big]\eta_i^{-m_i}\ln\eta_i = 0. \tag{6}$$

将式(5)代入式(6), 经整理后得

$$\frac{1}{m_i} = -\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} + \Big[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\ln T_i^*\Big]/$$
$$\Big[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\Big]. \tag{7}$$

定理成立. 应用时可对式(4)进行迭代求出精度很高的 $\hat{m}_i$, 代入式(3)求出 $\hat{\eta}_i$.

4　混合数据分析

由定理 1, 可知当 $r_1 = 0$ 时, 方程组(3), (4)式无意义. 因此, 不能从式(3), (4)解出 m_1 与 η_1, 必须作特殊处理.

4.1　方法一—— m_1, η_1, η_0 和 m_0 的估计

4.1.1　m_1 与 η_1 的估计　记 S_1 水平上产品寿命为 X_1, $R_1 = P(X_1 > T_1^*)$, 因 n_1 个样品试验到 T_1^* 都不失效的概率为 $L(R_1, n_1) = R_1^{n_1}$, $0 < R_1 < 1$. 其中 R_1 为待估参数, n_1 为投试样品数, 非 $r.v.$ 但可视为 $r.v.$ 的特例, 故 $L(R_1, n_1)$ 可看作 n_1 的似然函数. 由 Bayes 假设, 视 R_1 为 $r.v.$, 其密度 $\pi(R_1) = U(0,1)$. 因此, 可得(R_1, n_1)的似然函数为 $L(R_1, n_1) = R_1^{n_1}\pi(R_1) = R_1^{n_1}$, $0 < R_1 < 1$. R_1 的后验密度为 $f(R_1 \mid n_1) = R_1^{n_1} \Big\backslash \int R_1^{n_1}\mathrm{d}R_1 = (n_1 + 1)R_1^{n_1}$, $0 < R_1 < 1$. 在平方损失下, R_1 的 Bayes 估计为

$$\hat{R}_1 = E(R_1 \mid n_1) = \int f(R_1 \mid n_1)\,\mathrm{d}R_1 = \int (n_1 + 1)R_1^{n_1}\mathrm{d}R_1 = \frac{n_1 + 1}{n_1 + 2}.$$

因 $R_1 = P(X_1 > T_1^*) = \exp\{-(T_1^*/\eta_1)^{m_1}\}$, 故有

$$\hat{R}_1 = \frac{n_1 + 1}{n_1 + 2} = \exp\Big\{-\Big(\frac{T_1^*}{\hat{\eta}_1}\Big)^{\hat{m}_1}\Big\}. \tag{8}$$

式(8)中含有两个未知参数 $\hat{m}_1, \hat{\eta}_1$, 故必须另找一个条件.

因从式(3), (4), 可解得$(\hat{m}_i, \hat{\eta}_i)$, $(i = \overline{2, k})$. 再应用假定 II 的模型(2), $\ln\eta = a_1 + b_1\varphi(s)$, 由数据组$(\varphi_i, \ln\hat{\eta}_i)(i = \overline{2, k})$, 可建立方程 $\ln\hat{\eta} = \hat{a}_1 + \hat{b}_1\varphi(s)$, $\hat{a}_1 = \overline{\ln\eta} - \hat{b}_1\bar{\varphi}$. 有

$$\hat{b}_1=\left[\sum_{i=2}^{k}\varphi_i\ln\hat{\eta}_i-(k-1)\bar{\varphi}\overline{\ln\eta}\right]\Big\backslash\sum_{i=2}^{k}(\varphi_i-\bar{\varphi})^2,$$

$$\bar{\varphi}=\frac{1}{(k-1)}\sum_{i=2}^{k}\varphi_i,\qquad \overline{\ln\eta}=\frac{1}{(k-1)}\sum_{i=2}^{k}\ln\hat{\eta}_i,\tag{9}$$

则

$$\ln\hat{\eta}_1=\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(s_1),\qquad \hat{\eta}_1=\exp\{\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(s_1)\}.\tag{10}$$

再由式(8)与式(10),解得

$$\hat{m}_1=\ln\left(-\ln\left(\frac{n_1+1}{n_1+2}\right)\right)/\ln(T_1^*/\hat{\eta}_1).\tag{11}$$

4.1.2 η_0 的估计 应用$(\varphi_i,\ln\hat{\eta}_i)(i=\overline{1,k})$,建立方程 $\ln\hat{\eta}=\hat{a}_2+\hat{b}_2\varphi(s)$,可求得

$$\hat{\eta}_0=\exp\{\hat{a}_2+\hat{b}_2\varphi(s_0)\}\tag{12}$$

4.1.3 m_0 的估计 因在 S_i 上的$(\hat{m}_i\hat{\eta}_i)(i=\overline{1,k})$ 均已算出,故 θ_i 的估计值为 $\hat{\theta}_i=\hat{\eta}_i^{\hat{m}_i}(i=\overline{1,k})$. 由式(1) $\ln\theta=a+b\varphi(s)$,应用数据组$(\varphi_i,\ln\hat{\theta}_i)(i=\overline{1,k})$,可建立回归方程 $\ln\hat{\theta}=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)$,而 $\ln\hat{\theta}_0=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)$. 即 $\ln\hat{\eta}_0^{\hat{m}_0}=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)$ $\hat{m}_0\ln\hat{\eta}_0=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)$,则得

$$\hat{m}_0=[\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)]\backslash[\hat{a}_2+\hat{b}_2\varphi(s_0)],\tag{13}$$

$F_0(t)=1-\exp\{-\left(\frac{t}{\hat{\eta}_0}\right)^{\hat{m}_0}\}$,及其它可靠性指标.

4.2 方法二——追加试验

若对方法一的分析结果不放心,可以追加试验保留做过的试验数据仍然有效.

因 Weibull 分布函数是曲线,要把 m_1 与 η_1 估计出来,应在 S_1 水平下均匀地再选出 k 个观测点 $t_{11}<t_{12}<\cdots<t_{1k}$. 尔后,追加投放 l_i 个样品试验到 t_{1i} 时刻均无失效$(i=\overline{1,k})$. 这样,获得新的无失效数据$(t_{11},l_1)(t_{12},l_2)\cdots(t_{1k},l_k)(T_1^*,n_1)$,记 $t_{1l+1}=T_1^*$,$l_{k+1}=n_1$,则$(t_{1i},l_i)_{1\le i\le k+1}$为无失效数据组. 记 $R_i=P(X_1>t_{1i})$,$N_i=\sum_{j=i}^{k+1}l_i(i=\overline{1,k+1})$,下面分析'无失效数据组'所提供的寿命信息. (1) (t_{1i},l_i) 只能提供 $X_1>t_{1i}$ 的寿命信息,无法提供 $X_1>t_{1i+1}(i=\overline{1,k})$ 的寿命信息;反之 (t_{1i+1},l_{1i+1}),既可提供 $X_1>t_{1i+1}$ 的寿命信息又可提供 $X_1>t_{1i}$ 的寿命信息. (2) 由性质(1)知有 N_i 个样品的寿命 $X_1>t_{1i}(i=\overline{1,k+1})$. (3) 因 $t_{1i}<t_{1i+1}$,故 $R_i>R_{i+1}$. (4) 因 $0<R_1<1$,应用 Bayes 假设,视 R_i 为 $r.v.$,其分布密度为 $\pi(R_i)=U(0.1)(i=\overline{1,k+1})$.

综合上述 4 个信息知,在点$(t_{11},t_{12},\cdots,t_{1\cdot k+1})$上作一次观测后,有样品 N_1 个在 t_{11} 不失效,N_2 个在 t_{12} 不失效;……N_{k+1} 个在 t_{1k+1} 不失效. 故在$(t_{11}t_{12}\cdots t_{1k+1})$不失效的概率为 $L(R,N)=\prod_{i=1}^{k+1}R_i^{N_i}$,$R_i$ 为未知参数. N_i 为可视为 $r.v.$ 的特例,故 $L(R,N)$ 可看作 N 的似然函数. 若视 R 为 $r.v.$,则 $L(R,N)$ 为 R,N 的联合似然函数. 即

$$L(R,N)=\prod_{i=1}^{k+1}R_i^{N_i},\ \pi(R_i)=U(0.1),\qquad R=(R_1,R_2\cdots,R_{k+1}),$$

$$N=(N_1,N_1,\cdots,N_{k+1}),\ \pi(R_1,R_2\cdots,R_{k+1})=\begin{cases}1,\text{当}(R_1>R_2>,\cdots,>R_{k+1}),\\0,\text{其它}.\end{cases}$$

根据 Bayes 定理,得 R 的后验密度为

$$f(R\ N)=\prod_{i=1}^{k+1}R_i^{N_i}\Big\backslash\int_D\prod_{i=1}^{k+1}R_i^{N_i}\mathrm{d}R_i,\ D=\{R:R_1>R_2>,\cdots,>R_{k+1}\}.\tag{14}$$

4.2.1 R_j 的估计 下面介绍定理 2.

定理 2　R_1 的后验密度为

$$f(R_1 \mid N) = \left[\sum_{i=1}^{k+1} N_i + (k+1)\right] R_1^{\sum_{i=1}^{k+1} N_i + k}. \tag{15}$$

在二次损失下，R_1 的 Bayes 估计为

$$\hat{R}_1 = \left[\sum_{i=1}^{k+1} N_i + (k+1)\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{k+1} N_i + (k+2)\right]. \tag{16}$$

证明　由式(14)记 $f(R \mid N) = I_1 / W_{k+1}$，其中 $W_{k+1} = \int_D \prod_{i=1}^{k+1} R_i^{N_i} \mathrm{d}R_i$，$I_1 = R_1^{N_1} \int_0^{R_1} R_2^{N_2} \mathrm{d}R_2 \cdot \int_0^{R_2} R_3^{N_3} \mathrm{d}R_3 \cdots \int_0^{R_k} R_{k+1}^{N_{k+1}} \mathrm{d}R_{k+1}$；$k$ 次积分得 $I_1 = R^{\left[\sum_{i=1}^{k+1} N_i + k\right]} / (N_{k+1}+1)(N_k + N_{k+1} + 2)\cdots\left(\sum_{i=2}^{k+1} N_i + k\right)$. 因

$$\int_0^1 I_1 \mathrm{d}R_1 = 1/(N_{k+1}+1)(N_k + N_{k+1} + 2)\cdots\left(\sum_{i=1}^{k+1} N_i + k + 1\right) = W_{k+1},$$

故式(15)成立. 在二次损失下，R_1 的 Bayes 估计为

$$\hat{R}_1 = E(R_1 \mid N) = \int_0^1 R_1 f(R_1 \mid N) \mathrm{d}R_1,$$

即得式(16). 因(t_{1i}, N_i) $(1 \leq i \leq j-1)$ 无法提供 $X_1 > t_{1j}$ 的寿命信息，对估计 $\hat{R}_j$ $(j = \overline{2, k+1})$ 时没有用，则利用

$$f(R(j) \mid N(j)) = \prod_{i=1}^{k+1} R_i^{N_i} \Big/ \int_{D(k+2-j)} \prod_{i=1}^{k+1} R_i^{N_i} \mathrm{d}R_i,$$

其中 $R(j) = (R_j, R_{j+1}, \cdots, R_{k+1})$，$N(j) = (N_j, N_{j+1}, \cdots, N_{k+1})$，$D(k+2-j) = \{R(j): R_j > R_{j+1} > \cdots > R_{k+1}\}$. 在二次损失下，有

$$\hat{R}_j = \left[\sum_{i=1}^{k+1} N_i + (k+2) - j\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{k+1} N_i + (k+3) - j\right] \quad (j = \overline{2, k+1}). \tag{17}$$

4.2.2　m_1 与 η_1 的估计　因 $F_{s_1}(t) = 1 - \exp\{-(\frac{t}{\eta_1})^{m_1}\}$，$R_{s_1}(t) = \exp\{-(\frac{t}{\eta_1})^{m_1}\}$，$\ln R_{s_1}(t) = -(\frac{t}{\eta_1})^{m_1}$，$\ln(-\ln R_{s_1}(t)) = m_1 \ln t - m_1 \ln \eta_1$，记 $y = \ln(-\ln R_{s_1}(t))$，$x = \ln t$，$b = m_1$，$a = -m_1 \ln \eta_1$，则 $y = a + bx$ 是线性模型. 以 $\hat{y} = \ln(-\ln \hat{R}_{s_1}(t))$ 代 y，$\hat{y} = a + bx + \epsilon$，$\epsilon$ 是误差. 利用 $\hat{R}_i = \ln(-\ln \hat{R}_i)$，$x_i = \ln t_i$ $(i = \overline{1, k+1})$，按"加权最小二乘法"记权数 $\omega = x_i l_i \Big/ \sum_{j=1}^{k+1} l_j x_j$ $(i = \overline{1, k+1})$，求 $\hat{a}, \hat{b}$ 满足 $\sum_{i=1}^{k+1} \omega (y_i - \hat{a} - \hat{b} x_i)^2 = \min$，可得

$$\hat{a} = \frac{B_\omega C_\omega - A_\omega D_\omega}{B_\omega^2 - A_\omega^2}, \qquad \hat{b} = \frac{D_\omega - A_\omega C_\omega}{B_\omega - A_\omega^2}, \tag{18}$$

$$A_\omega = \sum_{i=1}^{k+1} \omega x_i, \qquad B_\omega = \sum_{i=1}^{k+1} \omega x_i^2, \qquad C_\omega = \sum_{i=1}^{k+1} \omega \hat{y}_i, \qquad D_\omega = \sum_{i=1}^{k+1} \omega x_i \hat{y}_i,$$

$$\hat{b} = \hat{m}_1, \qquad \hat{a} = -\hat{m}_1 \ln \hat{\eta}_1, \qquad \hat{\eta}_1 = \mathrm{e}^{-\hat{a}/\hat{m}_1}.$$

再利用$(\hat{m}_i, \hat{\eta}_i)$，$\varphi(s_i)$ $(i = \overline{1, k})$ 和假定Ⅱ的模型(2)，模型(1) $\ln \eta = a + b\varphi(s)$，$\ln \theta = a + b\varphi(s)$，可以算出 $\hat{m}_0$ 与 $\hat{\eta}_0$.

5　例子

对某型号的电容器，为评定其在正常温度 $S_0 = 323$ K 下的各种可靠性特征值，对其作定时

截尾恒定应力加速寿命试点, $\varphi(s)=\frac{1}{k_0 s}$($k_0=0.8617\times10^{-4}/k$). 各加速温度水平及试验数据, 如表2所示.

表2　试验数据

应力水平/K	样品数	失效数	失效时间/h	截尾时间/h
$S_1=358$	$n_1=20$	$r_1=0$		$T_1^*=500$
$S_2=398$	$n_2=20$	$r_2=4$	18, 22, 47, 186	$T_2^*=200$
$S_3=423$	$n_3=16$	$r_3=4$	11, 13, 87, 96	$T_3^*=100$
$S_4=443$	$n_4=12$	$r_4=4$	6, 9, 30, 52	$T_4^*=60$

$\varphi_i=\varphi(s_i)$, 有 32.416 2, 29.158 6, 27.435 3, 25.903 4, 而 $\varphi_0=35.928\ 7$. 应用定理1的式(3)与(4), 解得 $\hat{m}_2=0.776\ 4$, $\hat{\eta}_2=985.944\ 4$, $\hat{m}_3=0.870\ 2$, $\hat{\eta}_3=280.030\ 9$, $\hat{m}_4=0.934\ 8$, $\hat{\eta}_4=87.400\ 4$.

5.1　应用方法一进行分析

5.1.1　求 m_1 与 η_1 的估计　应用数据组(φ_i, $\ln\hat{\eta}_i$), ($i=\overline{2,4}$), 可以求得 $\hat{b}_1=0.744\ 1$ 和 $\hat{a}_1=-14.795\ 6$. 相关系数 $r_{\varphi\eta}=0.999\ 92$, 在 $\alpha=0.01$ 下通过检验. 因此, 方程 $\ln\hat{\eta}=-14.795\ 6+0.774\ 4\varphi(s)$ 可靠. $\ln\hat{\eta}_1=9.325\ 3$, $\hat{\eta}_1=11\ 218.2$, $m_1=\ln(-\ln\frac{21}{22})\backslash\ln(\frac{500}{11\ 218.2})=0.986\ 2$($\ln\eta_0=11.935\ 4$, $\eta_0=152\ 566.04$).

5.1.2　求 η_0 的估计　应用数据组(φ_i, $\ln\hat{\eta}_i$), ($i=\overline{1,4}$), 可以求得方程 $\ln\hat{\eta}=-14.791\ 9+0.744\ 0\varphi(s)$ 和 $r_{\varphi\eta}=0.999\ 8$. 将 $\varphi_0=35.928\ 7$ 代入, 得 $\ln\hat{\eta}_0=11.939\ 1$, $\hat{\eta}_0=153\ 131.6$, 与前面计算的结果相同.

5.1.3　求 m_0 的估计　因 $\hat{\theta}_i=\hat{\eta}_i^{m_i}$($i=\overline{1,4}$), 可建立方程 $\ln\hat{\theta}=-16.246\ 3+0.771\ 2\varphi(s)$, $r_{\varphi\theta}=0.960\ 1$, $\ln\hat{\theta}_0=11.461\ 7$, $\hat{m}_0=\frac{\ln\hat{\theta}_0}{\ln\hat{\eta}_0}=0.960\ 0$, $F_0(t)=1-\exp\{-(\frac{t}{153\ 131.6})^{0.960\ 0}\}$. 由此, 可求得各种可靠性特征值.

5.2　应用方法二进行分析

在 S_1 水平上, 选定 $t_{11}=100$, $t_{12}=200$, $t_{13}=300$, $t_{14}=400$. 在 t_{1i} 上各追加试验一个样品均无失效, 得无失效数据(100, 1), (200, 1), (300, 1), (400, 1), (500, 20). $l_1=1$, $l_2=1$, $l_3=1$, $l_4=1$, $l_5=20$; $N_i=24$, $N_2=23$, $N_3=22$, $N_4=21$, $N_5=20$; $\hat{R}_1=[\sum_{i=1}^{5}N_i+4]\backslash[\sum_{i=1}^{5}N_i+5]=0.991\ 3$, $\hat{R}_2=[\sum_{i=2}^{5}N_i+4]\backslash[\sum_{i=2}^{5}N_i+5]=0.989\ 0$, $\hat{R}_3=0.985\ 3$, $\hat{R}_4=0.978\ 3$, $\hat{R}_5=0.960\ 0$. 应用 $\hat{y}_i=\ln(-\ln\hat{R}_i)$, 可算得 $\hat{y}_1=-4.740\ 1$, $\hat{y}_2=-4.504$, $\hat{y}_3=-4.212\ 5$, $\hat{y}_4=-3.819\ 5$, $\hat{y}_5=-3.198\ 5$. 应用 $x_i=\ln t_{1i}$, 可算得 $x_1=4.605\ 2$, $x_2=5.298\ 3$, $x_3=5.703\ 8$, $x_4=9.991\ 5$, $x_5=6.214\ 6$; $\omega=0.031\ 6$, $\omega_2=0.036\ 3$, $\omega_3=0.039\ 1$, $\omega_4=0.041$, $\omega_5=0.852\ 0$; $A_\omega=6.102\ 0$, $B_\omega=37.342\ 0$, $C_\omega=-3.360\ 1$, $D_\omega=-20.373\ 3$; $\hat{a}=-11.046\ 7$, $\hat{b}=1.208\ 5$. 即 $\hat{m}_1=1.208\ 5$, $\hat{\eta}_1=9\ 331.44$. 应用 $\ln\hat{\eta}_1=9.141$, $\ln\hat{\eta}_2=6.893\ 6$, $\ln\hat{\eta}_3=5.639\ 9$, $\ln\hat{\eta}_4=4.470\ 5$ 与 φ_i($i=\overline{1,4}$), 可建立方程 $\ln\hat{\eta}=-14.008\ 9+0.715\ 1\varphi(s)$, $r_{\varphi\eta}=0.999\ 7$. 方程可靠. 算得 $\ln\hat{\eta}_0=11.683\ 7$, $\hat{\eta}_0=118\ 623.9$. 再用 $\ln\hat{\theta}_1=11.047\ 0$, $\ln\hat{\theta}_2=5.352\ 2$, $\ln\hat{\theta}_3=4.903\ 5$, $\ln\hat{\theta}_4=4.179\ 0$ 与 φ_i($i=\overline{1,4}$), 建立方程 $\ln\hat{\theta}=-23.983\ 4+1.062\ 3\varphi(s)$, $r_{\varphi\theta}=0.941\ 1$. 方程可靠. $\ln\hat{\theta}_0=14.185\ 7$, $\hat{m}_0=\frac{\ln\hat{\theta}_0}{\ln\hat{\eta}_0}=1.214\ 0$, $R(t)=$

$\exp\{-(\frac{t}{118\,623.9})^{1.2140}\}$. 从而可求得所有的可靠性指标.

6　结束语

(1) 计算结果检查. (a) 方法 1. $\hat{m}_0 = 0.960\,0$, $\hat{m}_1 = 0.986\,2$, $\hat{m}_2 = 0.776\,4$, $\hat{m}_3 = 0.870\,2$, $\hat{m}_4 = 0.934\,8$, $\hat{m}_1$ 最大, $\hat{m}_2$ 最小, $\hat{m}_1 = 1.27\hat{m}_2$. 若不计误差, 则形状参数基本相等. $r_{\varphi\eta} = 0.998\,8$, $\ln\eta = a_1 + b_1\varphi(s)$ 成立. (b) 方法 2. $\hat{m}_0 = 1.214\,0$ 最大, $\hat{m}_2 = 0.776\,4$ 最小, $\hat{m}_0 = 1.56\hat{m}_2$. 若不计误差, 形状参数也可算是基本相等. $r_{\varphi\eta} = 0.999\,7$, $\ln\eta = a_1 + b_1\varphi(s)$ 成立. 读者可以检查其它论文或著作, 看看所得结论是否与假设一致. (2) 计算的结果知形状参数并非与应力变化无关, 是有差异的. 目前, 无法判别这种差异是随机误差或是系统误差. (3) 若可断定 m 与应力变化无关, 则加上假设 $m_0 = m_2 = \cdots = m_k$, 此时假定Ⅲ中的 $\ln\theta = a + b\varphi(s)$ 与模型 $\ln\theta = a_1 + b_1\varphi(s)$ 一致. 故可去掉(2), 恰好与许多书籍和文献一致. 此时 $\hat{m}_0 = \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{4}\hat{m}_i = 0.860\,5$, 就无需应用图分析法或 CLUE, BLUE 估计法. 应用最大似然估计法, 既简单精度又高. (4) 若无法判断 $\hat{m}_i(i = \overline{1,k})$ 的差异是随机误差, 那么形状参数 m 与应力变化无关的假定, 不是错误就是多余. (5) 因对 m_0 的估计方法不同, 会影响 $F_0(t) = 1 - \exp\{-(\frac{t}{\eta_0})^{\hat{m}_0}\}$ 的估计, 于是就影响其它可靠性特征值的估计. (6) 当 S_1 水平下有失效数据时, 本文的方法也适用. 此时 $r_1 \neq 0$, 不必对 m_1 与 η_1 作特殊处理, 可从式(3), (4) 解出 m_1 与 η_1.

参　考　文　献

1　戴树森, 贵鹤良, 王玲玲等. 可靠性试验及其统计分析. 北京: 国防工业出版社, 1984. 449～578

2　仲崇新. Weibull 分布场合下恒定应力加速寿命试验的 Bayes 方法. 应用数学学报, 1992. 15(3): 373～379

3　王玲玲, 许家清. 威尔分布下恒加试验中的区间估计. 数理统计与应用概率, 1994, 9(4): 84～91

A Statistical Analysis of Mixed Data from Test of Life in Weibull Distribution under Constant Accelerated Stress

Wu Shaomin

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A statistical analaysis is made on the reliability of the mixed data from life test under constant accelerated stress. The Weibull distribution as a life distribution will get rid of the limitation of shape parameter which is irrelevant to accelerated stress. The parameter of life distribution under normal stress is gaven, the estimate of average life and variation coefficient are also given.

Keywords　Weibull distribution, constant accelerated stress, mixed data