

# 塔板液体停留时间分布的模拟<sup>\*</sup>

王维德

(华侨大学化工学院, 泉州 362011)

**摘要** 利用马尔可夫过程的理论和方法, 模拟多级塔板上的液体随机流动现象. 通过建立包含马尔可夫过程的多级塔板液体流动的数学模型, 及对该模型进行数学推导, 得到描述各级塔板出口液体停留时间分布数学解析式. 在一定的实验条件下, 测得液体停留时间分布的平均停留时间  $\tau$  和方差  $\sigma$ , 可得到各级塔板液体停留时间分布的具体计算式. 实验证明, 同时进入某一块塔板的液体, 在该塔板上的液体停留时间基本符合正态分布. 该模型模拟灵活方便, 切合实际, 能准确反映过程的实质.

**关键词** 塔板, 液体流动, 停留时间分布, 马尔可夫过程

**分类号** TQ 028.31; TQ 018

塔板上液体流动状况影响着传质过程. 由于塔板液体的不均匀流动及流体流动的随机性, 造成塔板液体停留时间的不均匀性. 几十年来, 许多学者在塔板液体流动的模拟与放大方面进行了大量研究, 提出了许多描述塔板上液体混合程度和计算塔板效率的数学模型<sup>[1~9]</sup>. 他们所建立的模型是针对某一块塔板的不均匀流动, 即假定进入这一块塔板的液体入口时间相同. 事实上, 由于多板液体流动的不均匀性, 同时进入第一块塔板的液体, 其离开的时间不同, 进入第二块塔板的时间也就不同. 受第二块塔板不均匀流动的影响, 这些同时进入第一块塔板的液体离开第二块塔板时间分布的差异, 将比离开第一块塔板时的差异为大. 这种差异在流往下面多块塔板后将继续扩大, 这对传质产生不利影响(理想流动时差异为0). 本文拟对这个问题进行探讨, 通过利用马尔可夫过程的原理和方法, 建立一个包含马尔可夫过程的描述塔板液体流动模型, 求解得到各块塔板出口液体停留时间分布的密度函数解析式.

## 1 马尔可夫过程的描述<sup>[10]</sup>

马尔可夫过程包括时间和状态都离散、时间连续而状态离散, 以及时间和状态都连续等3种类型.

令  $X(t)$  为随机变量, 对于随机过程  $\{X(t), t = t_1, t_2, \dots\}$ . 设在任一时刻  $t_n, X_n = X(t_n) = j_n$ ,  $j_n \in \mathbf{I}$ . 若  $P\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} | X(t_1) = j_1, X(t_2) = j_2, \dots, X(t_n) = j_n, j_k \in \mathbf{I}\} = P\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} | X(t_n) = j_n\}$ , 则称此随机过程为时间和状态均离散的马尔可夫过程(或称马氏链).

对马氏链的直观解释是, 随机变量  $X(t)$  从“现在( $t = t_n$ )”所处的状态  $X(t_n) = j_n$  转移到“将

来( $t = t_{n+1}$ ) 状态  $X(t_{n+1}) = j_{n+1}$  的条件转移概率. 它只与“现在”所处的状态  $X(t_n) = j_n$  有关, 与“现在”以前  $t = t_{n-1}, t = t_{n-2}, \dots, t_2, t_1$  随机变量所处的状态  $j_{n-1}, j_{n-2}, \dots, j_2, j_1$  无关.

对于马氏链, 条件转移概率中最重要的是步转移概率. 取时间为正整数空间, 称从  $t = n$  时的状态  $X(n) = i$  经一步转移到  $t = n+1$  的状态  $X(n+1) = j$  的概率为一步转移概率, 可记为  $P\{X(n+1) = j | X(n) = i\}$ , 有时简记为  $P_{ij}(n)$ . 若  $P_{ij}(n)$  与  $n$  无关, 则称马氏链具有时齐性.

若时间连续, 随机变量从  $t$  时刻所处的状态  $X(t) = i$  经  $\Delta t$  后, 变化到状态  $X(t + \Delta t) = j$ . 它只与  $t$  时刻状态有关, 与  $t$  以前  $X(\tau, \tau < t)$  所处的状态无关, 则称该随机过程为时间连续、状态离散的马氏过程. 其可记为  $P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i, X(\tau) = k, \tau < t\} = P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\}$ , 简记为  $P_{ij}(t, t + \Delta t)$ . 若  $P_{ij}(t, t + \Delta t)$  只与  $\Delta t$  有关, 而与  $t$  无关, 则称过程为时齐的马尔可夫过程, 记为  $P_{ij}(t, t + \Delta t) = P_{ij}(\Delta t)$ .

## 2 塔板液体停留时间分布模型的建立<sup>[1]</sup>

图1为塔板液体流动示意图. 图中  $L$  为通过各塔板的液体体积流量,  $V$  为各块塔板上的清液体积. 为了描述各块塔板出口液体的停留时间分布, 设  $t = 0$  时, 在第一块塔板的入口处脉冲注入数量为  $G$  的示踪剂, 则在整个时间区间内, 示踪剂颗粒处在任一块塔板的概率为一典型的时间连续、状态离散、时齐的马尔可夫过程. 令  $X(t)$  表示示踪颗粒处在某块塔板的状态, 设塔板数为  $N$ , 则  $X(t)$  可能有  $1, 2, \dots, N$  个状态. 对于任一状态  $n (1 \leq n \leq N-1)$ , 可作如下几点假定.

(1) 对于任何一块塔板, 若液体同时进入该塔板, 经过一段时间后, 这些液体质点陆续离开该塔板. 其出口时间与入口时间之差, 即板上停留时间分布符合正态分布, 其概率密度函数  $g(t)$  为

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(t - \tau)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1)$$

式中  $\sigma$  为板上液体停留时间分布的方差, 表征具有不同板上停留时间的流体质点的停留时间的差异程度, 即离散度, 其值和操作条件、塔板结构参数等有关.  $\tau$  为液体质点在塔板上的平均停留时间, 其值可由下式得出, 即

$$\tau = L/V. \quad (2)$$

(2) 基于假定(1), 在  $(t, t + \Delta t)$  时间间隔内, 示踪颗粒从第  $n$  块板转移到第  $n+1$  块板概率为  $g(t) \Delta t + O(\Delta t)$ ,  $O(\Delta t)$  为  $\Delta t$  的高阶无穷小.

(3) 在  $(t, t + \Delta t)$  内, 示踪颗粒不发生变化, 即其仍处于第  $n$  块塔板的概率为  $(1 - g(t)) \Delta t + O(\Delta t)$ .

(4) 在  $(t, t + \Delta t)$  内, 示踪颗粒状态的转移大于 1 块塔板, 即从第  $n$  块塔板转移到第  $n+2$  块塔板和大于第  $n+2$  块塔板的概率为  $O(\Delta t)$ .

显然, 以上各概率都与示踪颗粒所处的状态  $n$  无关. 现令  $P_i(t) = P\{X(t) = i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 其中  $P_i(t)$  为  $t$  时刻示踪颗粒处于状态  $i$  的概率. 则有

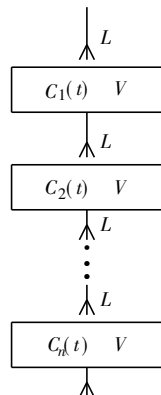


图1 塔板液体流动示意图

$$P_i(t, t + \Delta t) = [1 - g(t) \Delta t] P_i(t) + g(t) P_{i-1}(t) \Delta t + O(\Delta t), \quad (3)$$

将上式重新整理为

$$\frac{[P_i(t + \Delta t) - P_i(t)]}{\Delta t} = g(t) P_{i-1}(t) - g(t) P_i(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}.$$

令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = g(t) P_{i-1}(t) - g(t) P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

式(4)的初始条件为

$$P_i(0) = \begin{cases} 1 & i = 1, \\ 0 & i = 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

且由题义可知,

$$P_0(t) = 0. \quad (6)$$

### 3 模型的求解

令  $i = 1$ , 由式(4), (6)可得

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -g(t) P_1(t). \quad (7)$$

经积分得  $\ln P_1(t) - \ln P_1(0) = - \int_0^t g(u) du$ . 式(7)  $P_1(0) = 1$ , 故得

$$P_1(t) = \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right). \quad (8)$$

令  $i = 2$ , 由式(4)得

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = g(t) P_1(t) - g(t) P_2(t). \quad (9)$$

上式两边同乘以  $\exp\left(- \int_0^t g(u) du\right)$ , 移项整理后得

$$\frac{dP_2(t)}{dt} \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right) + P_2(t) g(t) \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right) = g(t) \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right) P_1(t),$$

式中  $\exp\left(- \int_0^t g(u) du\right) P_1(t) = \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right) \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right) = \exp(0) = 1$ . 左边两项和恰

为  $P_2(t) \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right)$  的导数, 于是得

$$\frac{d[P_2(t) \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right)]}{dt} = g(t).$$

上式经分离变量后积分, 且由  $P_2(0) = 0$  可得

$$P_2(t) = \int_0^t g(u) du \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right). \quad (10)$$

令  $i = 3$ , 由式(4)可得

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = g(t) [P_2(t) - P_3(t)] = g(t) \left[ \int_0^t g(u) du \exp\left(- \int_0^t g(u) du\right) - P_3(t) \right].$$

经相似处理得

$$d[P_3(t) \exp(-\int_0^t g(u) du)] / dt = -g(t) \exp(-\int_0^t g(u) du),$$

分离变量并积分, 且由  $P_3(0) = 0$  可得

$$P_3(t) \exp(-\int_0^t g(u) du) = \int_0^t g(s) \int_0^s g(u) du ds = \int_0^t \int_0^s g(u) du ds \int_0^s g(u) du = \frac{(\int_0^t g(u) du)^2}{2},$$

则

$$P_3(t) = \frac{(\int_0^t g(u) du)^2}{2} \exp(-\int_0^t g(u) du). \quad (11)$$

依此类推, 可得

$$P_n(t) = \frac{(\int_0^t g(u) du)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\int_0^t g(u) du). \quad (12)$$

设  $t$  时刻第  $n$  块塔板示踪剂的平均浓度为  $C_n(t)$ , 则有

$$P_n(t) = \frac{V C_n(t)}{G}, \quad (13)$$

又设第  $n$  块塔板示踪颗粒板上停留时间分布密度函数为  $f_n(t)$ , 则

$$f_n(t) = \frac{L C_n(t)}{G}. \quad (14)$$

结合式(12) ~ (14), 可得

$$f_n(t) = \frac{(\int_0^t g(u) du)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\int_0^t g(u) du). \quad (15)$$

上式为在第一块塔板入口瞬时注入数量为  $G$  的示踪剂颗粒时, 这些颗粒流经各块塔板出口时的停留时间分布密度函数. 也即同时进入第一块塔板的流体质点, 流经各块塔块出口时的停留时间分布密度函数.

对于一个具体的操作,  $g(t)$  函数中的  $\tau$  和  $\sigma$  可由实验测定. 于是, 可对式(15)作近似的数值求解.

## 4 结论

塔板上液体流动是个随机过程, 用正态分布模拟同时进入某一块塔板的流体质点离开该塔板时板上停留时间分布. 这样, 既能较好地切合实际情况, 又因正态分布密度函数只有两个便于测定的模型参数  $\tau$  和  $\sigma$ , 应用灵活方便. 由于各块塔板液体流动的不均匀性, 同时进入塔顶第一块塔板的液体质点流经各块塔板出口时的时间分布的差异, 自上而下逐板增大, 这对传质产生不利影响. 利用马尔可夫过程的理论和方法描述塔板上液体的随机流动. 通过建立包含马尔可夫过程的模型并求解, 得到了各级塔板出口液体停留时间分布密度函数的数学解析式, 所得到的结果可作为讨论传质问题的基础.

## 参 考 文 献

- 1 Diener D A. Calculation of effect of vapor mixing on tray efficiency. *Ind. Eng. Chem. Pron. Des. Dev.*, 1967, 6(4): 499 ~ 503
- 2 Porter K E, Lockett M J, Lim C T. The effect of liquid channelling on distillation plate efficiency. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 1972, 50: 91 ~ 101
- 3 Brambilla A. The effect of vapor mixing on efficiency of large diameter distillation plates. *Chem. Eng. Sci.*, 1976, 31(7): 517 ~ 523
- 4 余国琮, 黄洁. 大型塔板的模拟与板效率的研究(I) 不均匀速度场的涡流扩散模型. *化工学报*, 1981, (1): 11 ~ 19
- 5 Bruin S, Freije A D. A simple liquid mixing model for distillation plates with stagnant zones. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 1974, 52: 75 ~ 79
- 6 Lockett M J, Safekourdi A. The effect of the liquid flow pattem on distillation plate efficiency. *Chem. Eng. J.*, 1976, 11: 111 ~ 121
- 7 Solar R B, Bell K L. Fluid flow patterns and velocity distribution on commercial-scale sieve trays. *AIChE J.*, 1986, 32(4): 640 ~ 649
- 8 宋海华, 余国琮, 王秀英. 精馏过程的动态模拟. *化工学报*, 1994, 45(4): 413 ~ 421
- 9 秦永胜, 徐用懋, 方崇智等. 多元精馏过程的非平衡级动态模型. *化工学报*, 1997, 48(2): 166 ~ 174
- 10 黄健榕. 颗粒离析的马尔科夫过程. *华侨大学学报(自然科学版)*, 1998, 19(3): 308 ~ 310
- 11 张泽庭, 余国琮. 马尔可夫过程及其在化学工程中的应用. *化学工程*, 1987, (1): 1 ~ 7, 13

## Simulation of the Distribution of Residence Time of Fluid on Trays

Wang Weide

(College of Chem. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** The residence time of fluid entering a certain tray at the same time basically accords with normal distribution, as proved by experiment. The phenomenon of random fluid flow on multistage column trays is simulated by applying theory and method of Markov process. A mathematical model of fluid flow on multistage column trays containing Markov process is formed for mathematical derivation. And then, a formula of mathematical analysis is obtained for describing the distribution of residence time of fluid on the outlets of multistage column trays. Under a certain experimental conditions, the distribution of residence time of fluid is determined to be average residence time  $\tau$  and variance  $\sigma^2$ ; that is to say, a specific formula can be obtained for calculating distribution of residence time of fluid on each stage column tray. The authors' model and simulation are flexible and convenient. They fit in with actual circumstances, by which the essence of the process can be precisely reflected.

**Keywords** column tray, fluid flow, distribution of residence time, Markov process