

三棱柱断面三角形及其作图^{*}

洪 若 霞

(华侨大学机电工程系, 泉州 362011)

摘要 从画法几何学中最基本的几何形体三棱柱入手, 研究三棱柱截断后断面三角形的几何特性. 它包括截平面空间位置的确定以及三棱柱的面与断面三角形之间各边长、内角的参数对应几何关系, 同时建立相关参数的计算公式. 为了解决可任意选择三棱柱棱线进行三棱柱断面三角形形状的计算问题, 提出采用参数替换法或形体旋转法. 在解决三棱柱断面三角形计算的同时, 又进一步研究相对应断面的两种不同处理方法, 并通过断面三角形的计算实例验证所述的基本论点与方法. 最后通过几何作图, 介绍三棱柱截平面、断面三角和断面实形图的作图方法与步骤.

关键词 三棱柱, 断面, 几何特性, 处理, 几何作图

分类号 TH 126

本文着重介绍基本几何形体三棱柱断面三角形的几何特性、断面的处理及投影图的制作. 三棱柱断面是用一个截平面将三棱柱截断, 在三棱柱上所得交线称为截交线. 由截交线围成的平面图形称为断面^[1], 而三棱柱上最常见的断面形状是三角形.

1 截断法

图1是三棱柱的空间位置, 棱线垂直坐标面 XOY , 且底面 $\triangle ABC$ 与坐标面 XOY 重合, 底边 AB 也与 OX 轴重合. A 点过坐标原点 O , 且过 A 点的棱线与 OZ 轴重合. 用截平面 $\triangle X_oY_oZ_o$ 将三棱柱截断, 该截平面分别与 OX, OY, OZ 轴的交点为 X_o, Y_o, Z_o 点. 在三棱柱上所产生的断面为 $\triangle DEF$, 且 D 点与 Z_o 点重合. 过 O 点作 X_oY_o 的垂线 OH , 设 $X_oH = \delta$, $OZ_oH = \theta$. 从图1中可以看出, 只要用 δ 角及 θ 角两个参数就能够确定截平面 $\triangle X_oY_oZ_o$, 因为截平面只能够上下平行移动, 所以要确定截平面的准确位置, 只需给 OZ_o 长度适当的值即可.

在图2中, 我们可以规定三棱柱底面 $\triangle ABC$ 的各边长度分别为 a, b, c , 各内角分别为 α, β, γ . 如果只已知 a, c, α 值, 同样能够求出其它参数值. 同理, 在断面 $\triangle DEF$ 上, 也可规定各边的长度分别为 d, e, f , 此三角形的各内角也分别为 λ, μ, ν . 当设 $\epsilon = f/d, f = \epsilon \cdot d$ 时, 如果已知 ϵ 和 λ 值, 则能够确定其相似三角形. 采用本截断法, 如果已知断面 $\triangle DEF$ 的 ϵ, λ 值, 同样能够进一步求出 δ 及 θ 的值^[2].

在图1中, 将 AC 边延长与 X_oY_o 相交, 得到交点 G . 当设 $\angle AGD = \sigma$, $\angle AX_oD = \rho$, $\angle X_oDH = \xi$, $\angle HDG = \eta$ 时, 则下列各计算公式成立.

$$\cos \rho = \frac{a}{d}, \quad (1)$$

$$\cos \sigma = \frac{c}{\epsilon d}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\cos \delta}{\operatorname{tg} \rho}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \cos(\alpha - \delta) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (4)$$

将式(3)代入式(4), 整理后得

$$\operatorname{tg} \delta = \left(\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} \rho \cos \alpha} \right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \delta \cdot \sin \theta, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg}(\alpha - \delta) \cdot \sin \theta, \quad (7)$$

$$\lambda = \zeta + \eta. \quad (8)$$

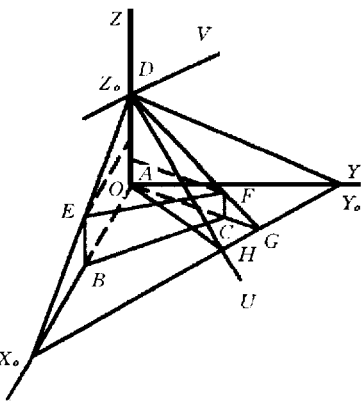


图1 三棱柱的空间位置

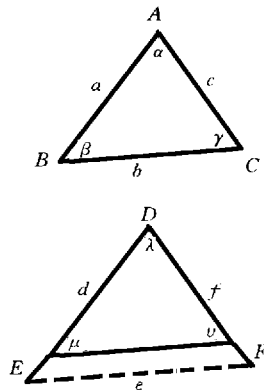


图2 三角形边长及内角的规定

在进行计算时首先假定 d 的值, 采用式(1)和式(2), 可求出 ρ, σ 的值; 采用式(5), 可求出 δ 的值; 采用式(3), 可求出 θ 的值; 采用式(6)和式(7), 也可求出 ζ, η 的值. 最后, 采用式(8) 将所求得 λ 值, 反复运算到与已知的 λ 值相等为止.

在图1中, 棱线 AD 的长度比棱线 BE, CF 长. 也就是说, 式(1)~(8) 是当 AD 棱线为最长情况下才成立. 当棱线 BE 或棱线 CF 比棱线 AD 长的情况下, 如果还运用上述式子计算时, 就无法求出不收敛的解答. 对于这种情况, 我们可将图1中的直角坐标系 $O-XYZ$ 固定不动而只旋转三棱柱, 将过 B 点的棱线或过 C 点的棱线分别旋转并与 OZ 轴重合后再进行计算. 例如, 当棱线 BE 在 OZ 轴上, 且边 BC 与 OX 轴重合时, 这样求出棱线 BF 为最长的情况. 在这种情况下, 只需将式(1)~(8) 中的参数符号改变一下, 即 a 给 b 值, c 给 a 值, α 给 β 值. 同理, 将 d 变成 e 值, ϵ 变成 d/e , λ 变成 μ 值后, 便可进行计算. 当过 C 点的棱线为最长的情况时, 同样也可将棱线 CF 旋转与 OZ 轴重合后, 并且采用类似的方法进行计算.

2 相对应断面的处理

在图3中, 过 A 点棱线上的 D 点, 可作出的断面三角形有 DEF 和 DE_1F_1 , 过 D 点还可作1个与棱线 AD 垂直的断面 $\triangle DE_0F_0$. 当取 $EE_0 = E_0E_1, FF_0 = F_0F_1$ 时, 我们可称 $\triangle DEF$ 和 $\triangle DE_1F_1$ 是相对应的断面. 也就是说, 要求的断面三角形有两个. 根据上面所述的方法, 计算时首先必须在三棱柱上选择两条棱线, 并且分别将它们旋转与 OZ 轴重合, 然后求出每一个所需的断面. 例如在图3中, 断面 $\triangle DEF$ 是以棱线 AD 作为最长, 且将棱线 AD 旋转与 OZ 轴重合时而求得的, 而断面 $\triangle DE_1F_1$ 则是棱线 CF_1 作为最长时求得的. 然而, 如果选择过 B 点的棱就无法求出所需的断面.

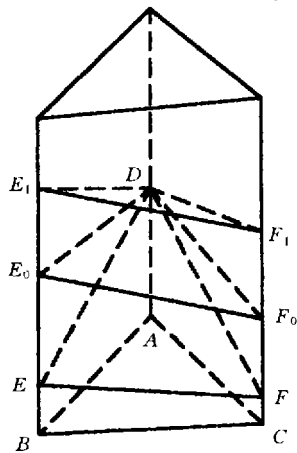


图3 棱线的选择

另一种处理方法, 在图4中, 当取 $AD_1 = AD$ 时, 断面 $\triangle DE_1F_1$ 和断面 $\triangle DEF$ 是关于 XOY 坐标面对称. 根据上面所述, 这两个断面也称为相对应的断面. 将断面 $\triangle DE_1F_1$ 向上平移到

$\triangle DE_2F_2$ 的位置, 当取 $OH = OH_2, OG = OG_2$ 时, 有 $H_2G_2 \parallel X_oY_o, G_2DF_2 \parallel D_1F_1G, H_2Z_o \parallel D_1H_1, OZ_oH_2 = \theta$ 可以看成是用平面 $\triangle Z_oH_2G_2$ (与平面 $\triangle X_oY_oD$ 平行) 将三棱柱截断后所产生的断面是 E_2F_2 ^① (图 3). 对于这种情况, 只需将计算式 (1) ~ (8) 部分修改之后, 便可得出适用于此情况的计算式. 当然, 在该图上, 如果采用第一种方法, 即以 CF_2 最长的棱线, 将它旋转与 OZ 轴重合后再计算也是可以的. 图 5 是表示 δ, ζ 取负值的情况.

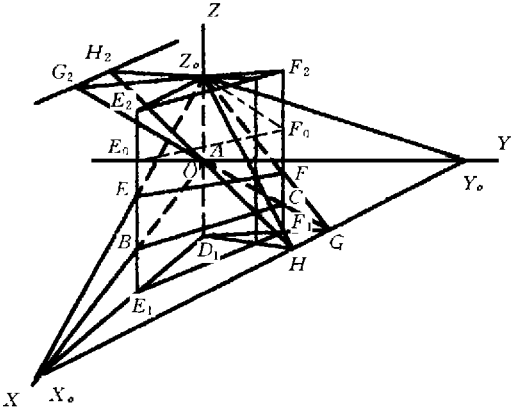


图 4 相对应断面的处理

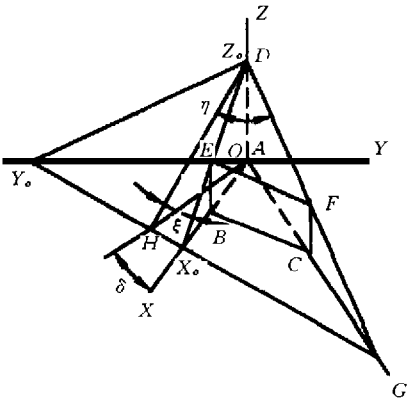


图 5 取 δ, ζ 为负值

3 断面的计算示例

这里将用计算机计算的断面示例用表 1 表示. 表中算例 1 表示断面 $\triangle DEF$ 为正三角形, 而表 1 计算示例表^①

项 目	算 例 1		算 例 2	
$\triangle ABC$	$a = 29, c = 27, \alpha = 70, b = 32.162\ 034$ $\beta = 52.080\ 142, \gamma = 59.919\ 857$		$a = c = 27, \alpha = 45, b = 20.664\ 905$ $\beta = \gamma = 67.5$ (等腰三角形)	
$\triangle DEF$	$\epsilon = 1, \lambda = 60, e = 32.350\ 090$ (正三角形)		$\epsilon = 0.7, \lambda = 40, d = 45, e = 29.077\ 723,$ $f = 31.5, \mu = 44.136\ 21, v = 95.866\ 378$	
项 目	A^* (过 A 点棱线)	B^* (过 C 点棱线)	A^* (过 A 点棱线)	B^* (过 B 点棱线)
d	32.350 090	f 32.350 090	44.355 560	e 28.661 309
ρ	26.305 662	33.423 812	52.503 189	43.862 040
σ	33.423 812	6.180 927	29.588 263	52.503 189
δ	46.580 087	- 23.419 865	- 21.002 091	46.497 907
θ	54.275 276	54.275 285	35.612 845	35.612 845
ζ	40.625 978	- 19.373 979	- 12.601 306	31.532 313
η	19.374 017	79.373 963	52.601 306	12.601 307
λ	59.999 996	v 59.999 984	39.999 999	μ 44.133 621
B, C	不能过 B 点棱线求解		不能过 C 点棱线求解	

① 长度单位为 mm, 角度为 “°”; $a, c, \alpha, \epsilon, \lambda, d$ 参数为预给值, 其余参数计算到小数点后第 6 位
算例 2 则表示断面 $\triangle DEF$ 为任意三角形. A^* 表示是将过 A 点的棱线与 OZ 轴重合, 而 B^* 则是表示将过 C 点或过 B 点的棱线与 OZ 轴重合. 算例 1 中的 B^* 和算例 2 中的 A^* 可参照图 5.

当给 AD 棱线适当值时, 并以它为基准, 便可计算出其它各棱线的长度.

4 作截平面和断面的投影图以及求断面的实形

为了方便作图(图1), 可将三棱柱所在的直角坐标系直接转化为投影坐标系. 即坐标面变为投影面(V, H, W 面). 在这3个投影面体系中, 我们将截平面 $\Delta X_o Y_o Z_o$ 用迹线来表示, 它们分别为正面迹线 T , 水平迹线 T 及侧面迹线 T . 从图1中可以得知 T, T, T , 分别与 $X_o Z_o, X_o Y_o, Y_o Z_o$ 线重合. 即在投影图中只需作出 $X_o Z_o, X_o Y_o, Y_o Z_o$ 线的投影, 便可表示截平面 $\Delta X_o Y_o Z_o$. 断面三角形 D, E, F 点在截平面上且 DE 也在 $X_o Z_o$ 线上, D 点与 Z_o 点重合, 利用平面上取点即可作出断面的投影图. 当取 $OZ_o = 20 \text{ mm}$, 采用表1计算例1中的 A^* , 可得截平面和断面的投影图^[6]如图6所示.

截平面投影图的具体作图步骤. (1) 根据所给的 OZ_o 值及 θ 角, 采用直角三角形法作直角三角形 $Z_o OH$, 确定 OH 的长度. (2) 根据 δ 角和 OH 长度, 作 $OH \perp X_o Y_o$, 作出 X_o 及 Y_o 点的投影(即水面迹线 T). (3) 根据已知的 OZ_o 值, 分别作出 $X_o Z_o, Y_o Z_o$ 线的投影(即正面迹线 T , 侧面迹线 T).

断面投影图的具体作图步骤. (1) 根据棱柱的投影特性, 断面 ΔDEF 与底面 ΔABC 的 H 面投影重合($\Delta ABC = \Delta def$), 并且反映 ΔABC 的实形. (2) DE 在 $X_o Z_o$ 线上, 且 D 点与 Z_o 点重合, 利用直线上的点的投影特性, 作出 DE 的另外二面投影 $d'e'$ 和 $d'e$. (3) 求 F 点的投影, 可先转化成为求 DG 线的投影, 而 G 点是将 AC 线及 DF 线延长与 $X_o Y_o$ 线的交点, 然后再利用点 F 是 $Z_o G$ 线上的点作出 F 点的 f' 及 f 的投影.

在图1中, 延长 $Z_o H$ 作为 $Z_o U$, 过 Z_o 点作 $Z_o V \perp X_o Y_o$, 且 $Z_o U \perp Z_o V$, 设定它为在截平面上的直角坐标系 Z_o-UV , 根据截平面和断面的投影(图6), 确定截平面上的点和断面上的点与直角坐标系 Z_o-UV 之间的相对位置关系. 然后, 采用直角三角形法作出断面的实形(图7).

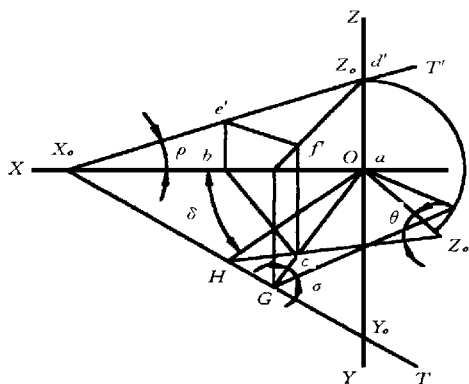


图6 截平面和断面的投影图

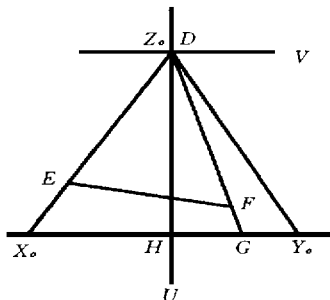


图7 断面的实形图

5 结束语

$\triangle ABC$ 的顶点 A 和 α 角, 有 $\triangle DEF$ 的顶点 D 的 λ 角与之对应. 当 $\triangle ABC$ 固定不动, 只是旋转 $\triangle DEF$, 同样对于底面 α 角也就有断面 μ 角或 ν 角与之对应. 按照前面所述, 对于底面 α 角有不同的断面顶点与之对应, 并且每一对应角都可以能求出两个形状、大小不同的断面三角形. 例如, 如果采用表 1 算例 2, 当底面 α 角与断面 μ 角对应的情况下, 选择过 A 点和过 C 点的棱线, 计算其结果为 $d = 46.097\ 172$, $\theta = 21.813\ 85$. 从以上的计算结果看, 由于断面上所选择的对应顶点不同, 故所计算出的断面三角形形状、大小是不同的. 所以, 对于一个三棱柱所要求的应该有 6 个断面三角形.

参 考 文 献

- 1 朱福熙, 何 斌. 建筑制图. 北京: 高等教育出版社, 1992. 152 ~ 154
- 2 近藤诚造. 三角形の切断に 关する 研究. 学研究, 1996, 31(2): 10 ~ 15
- 3 小高司郎. 现代 学. 东京: 森北出版株式会社, 1989. 97 ~ 100
- 4 前川道部. 形と 投象. 东京: 朝苍出版株式会社, 1989. 53 ~ 54
- 5 施翠娥. 正多边形的几何图法与解析法. 华侨大学学报(自然科学版), 1995, 16(1): 79 ~ 82

Triangle of the Fracture Surface of Triangular Prism and Its Geometric Construction

Hong Ruoxia

(Dept. of Electro. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Starting with triangular prism as the most elementary form and body of descriptive geometry, the present paper centers on the geometric properties of the triangle of the fracture surface of triangular prism after truncation. These properties include the determination of spatial position of fracture plane; and the corresponding geometric relation between edge and inner angle parameter of footing surface of triangular prism and those of the triangle of fracture surface. The author proposes to adopt methods of parameter substitution and rotation of form and body for calculating the shape of triangle of fracture surface of triangular prism with arbitrarily chosen arris fillet; and goes further into two different methods for treating footing surface and fracture surface; and virifies the author's basic argument and method by calculation example; and finally, describes the method and steps for drawing fracture plane of triangular prism and triangle of fracture surface and real shape of fracture surface.

Keywords triangular prism, fracture surface, geometric property, geometric construction