

纯粘无重土上圆形基础的极限承载力^{*}

彭 兴 黔

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 对圆形基础作用下纯粘无重土的塑性流动, 给出了基本满足静力许可条件的应力场和完全满足运动许可条件的速度场. 运用虚功率原理, 求解出该基础的极限承载力解析解, 它较数值积分计算简明、精度较高、结果较理想, 可供工程设计参考.

关键词 纯粘无重土, 圆形基础, 塑性流动, 极限承载力

分类号 TU 43

确定基础极限承载力是建筑工程极为关心的重要问题. 1955 年 Shield 分析了纯粘无重土 (Tresca 材料) 上的圆形平头刚性光滑基础的承载力问题, 通过对滑移线上应力方程式的数值积分, 求解了其极限承载力. 事后, 它一直被工程界引为设计依据, 因数值积分计算复杂且精度有限. 本文设定的塑性流动基本满足静力许可条件和完全满足运动许可条件, 具有数学分析较为简明和计算精度较高的特点.

1 静力许可应力场和运动许可速度场

纯粘无重土受圆形基础作用(图1), 当荷载逐渐增大时, 先从圆基周边开始形成塑性区; 随着塑性区扩展到整个基底后, 粘土即从基础周边被挤出而产生塑性流动. 此时的荷载即为极限承载力. 分析时作如下假设: (1) 粘土为纯粘无重且无硬化的理想刚塑性材料; (2) 基础与粘土的接触面无摩擦存在; (3) 圆形基础为绝对刚性.

1.1 静力许可应力场

根据受力状态, 这是一个空间轴对称问题, 其平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\tau_{rz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

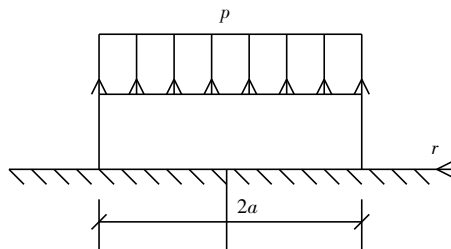


图1 圆形基础示意图

式中环向应力 σ_θ 是第二主应力, 由 Hear-Karman 的完全塑性假设. 它应等于最大或最小主应力, 即 $\sigma_\theta = \sigma_1$ 或 $\sigma_\theta = \sigma_3$. 在 roz 座标平面(子午面)内的两主应力为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2}. \quad (2)$$

由 Tresca 屈服准则, 得

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2, \quad (3)$$

式中 k 为纯粘土剪切屈服强度. 根据滑移线理论, 粘土塑性流动是在子午面内进行, 设

$$\sigma_r = \sigma - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + k \sin 2\varphi, \quad \tau_{rz} = k \cos 2\varphi, \quad (4)$$

式中 $\sigma = (\sigma_r + \sigma_z)/2$ 为平均应力, φ 为 α 滑移线与 σ_1 主应力迹线的夹角. 式(4) 满足屈服条件.

静力许可应力场分三个区域进行分析, 圆形基础下的圆锥体 ABC 随基础向下运动. 考虑边界条件, 此为均匀应力场, 两条滑移线与边界成 $\pi/4$ 的夹角, 有

$$\sigma_r = p - 2k, \quad \sigma_z = p, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_\theta = p - 2k.$$

若沿滑移线方向, 则 $\sigma_\alpha = \sigma$, $\sigma_\beta = \sigma$, $\tau_{\alpha\beta} = k$ 和 $\sigma_\theta = \sigma - k$. 具有自由边界的圆环体 BDE 也为均匀应力场, 两条滑移线与边界成 $\pi/4$ 夹角, 有 $\sigma_r = 2k$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{rz} = 0$ 和 $\sigma_\theta = 2k$. 同样沿滑移线方向, 则 $\sigma_\alpha = \sigma$, $\sigma_\beta = \sigma$, $\tau_{\alpha\beta} = k$ 和 $\sigma_\theta = \sigma + k$. 以上两均匀场, 均完全满足静力许可条件.

两均匀场间的圆环体 BCD , 应为一变异的中心场. 从方便考虑, 近似假设其滑移线是以 B 为圆心的圆弧族和共点直线族, 如图 2 所示. 沿滑移线方向, 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma, \sigma_\beta = \sigma, \\ \tau_{\alpha\beta} &= -k, \sigma_\theta = \sigma + k. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

该应力场除平衡方程外, 其余静力许可条件可满足.

1.2 运动许可速度场

圆锥体 ABC , 相当于刚体随基础以速度 v 向下运动 ($v_r = 0$, $v_z = v$), 而 BC 面为速度间断面, 其法向速度和切向速度差为

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha &= -\frac{2}{2}v, \\ \Delta v_\beta &= \frac{2}{2}v. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

但该区域应变率均为零

在圆环体 BCD 中, 粘土在子午面内以 B 为圆心作环向塑性流动, 在滑移线正交坐标系 (s_β, α, θ) 下, 有

$$x = (a + s_\beta \sin \alpha) \cos \theta, \quad y = (a + s_\beta \sin \alpha) \sin \theta, \quad z = s_\beta \cos \alpha, \quad (7)$$

$$(0 \leq s_\beta \leq 2a, \quad -\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

计算后可得应变率^[1]

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{s_\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\beta}{s_\beta}, \quad \epsilon_\beta = \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} \\ \epsilon_\theta &= \frac{v_\beta \sin \alpha + v_\alpha \cos \alpha}{a + s_\beta \sin \alpha}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{s_\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{s_\beta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

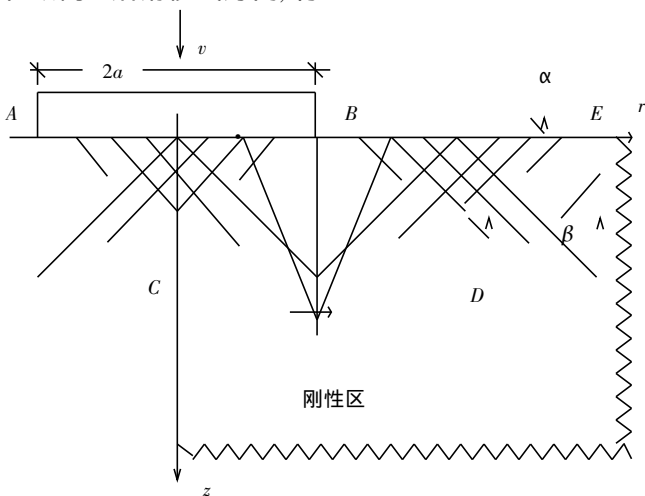


图2 滑移线场

因 $v_{\beta} = 0$ 及材料不可压缩 $\epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta} + \epsilon_{\theta} = 0$, 所以有

$$\frac{1}{s_{\beta}} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{v_{\alpha} \cos \alpha}{a + s_{\beta} \sin \alpha} = 0. \quad (9)$$

对式(9)积分并注意 $v_{\alpha}|_{\alpha=-\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}v$, 得

$$v_{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta})v}{(a + s_{\beta} \sin \alpha)}. \quad (10)$$

由上式可知, 在 CD 圆弧面上 $v_{\alpha}|_{s_{\beta}=-\sqrt{2}a} = 0$, 则该刚塑性区域交界处速度是连续的. 将式(10)代入式(8), 得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta})v}{(a + s_{\beta} \sin \alpha)^2} \cos \alpha, & \epsilon_{\beta} &= 0, \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta})v}{(a + s_{\beta} \sin \alpha)^2} \cos \alpha, \\ \gamma_{\theta\beta} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{av}{s_{\beta}(a + s_{\beta} \sin \alpha)} + \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta}) \sin \alpha v}{(a + s_{\beta} \sin \alpha)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在 BD 面和 DE 面上, 也是速度连续边界. 对圆环体 BDE , 在滑移线正交坐标系 $(s_{\alpha}, s_{\beta}, \theta)$ 下, 有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha} &= -\frac{v}{2} \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta})}{[a + \frac{\sqrt{2}}{2}(s_{\alpha} + s_{\beta})]^2}, & \epsilon_{\beta} &= 0, \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{v}{2} \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta})}{[a + \frac{\sqrt{2}}{2}(s_{\alpha} + s_{\beta})]^2}, & \gamma_{\theta\beta} &= -\frac{v}{2} \frac{(2a + \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\alpha})}{[a + \frac{\sqrt{2}}{2}(s_{\alpha} + s_{\beta})]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2 极限承载力的计算

由虚功率原理^[2]得

$$W_e = W_i + W_s, \quad (13)$$

式中 W_e , W_i 和 W_s 分别为外力功率、塑性变形功率和速度间断面上的剪切功率. 有

$$W_e = \int_v F v_i dv + \int_s T v_i ds = 2\pi \int_0^a p v dr = \pi p v a^2,$$

$$W_i = \int_v \alpha_{ij} \epsilon_{ij} dv = \pi k v \int_0^{\sqrt{2}a} \int_0^{s_{\beta}} ds_{\alpha} ds_{\beta} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi k v$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta})}{2} + \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta}) s_{\beta} \cos \alpha}{(a + s_{\beta} \sin \alpha)} - \frac{(a - \frac{\sqrt{2}}{2}s_{\beta}) a}{(a + s_{\beta} \sin \alpha)} \right] d\alpha ds_{\beta} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\pi + 4\ln 2 - 1 - 1.71\right)\pi k^2 v a^2 = 4.77\pi k v a^2,$$

$$W_s = \int_s \Delta v_i k ds = 2\pi \int_0^a k v r dr = \pi k v a^2.$$

将以上各功率代入式(13), 得

$$p = 5.77k. \quad (14)$$

此即所求纯粘无重土上圆形基础的极限承载力.

3 结束语

综上所述和计算表明, 本文设定的应力场基本满足静力许可条件, 速度场完全满足运动许可条件, 所得解答较为理想. 它较文献[6]圆基的极限承载力 $p = 5.69k$ 约大 1.4%, 较文献[4]条基的极限承载力 $p = (2 + \pi)k$ 约大 12.2%. 若将条基极限承载力作为圆基的极限承载力, 则属偏于安全.

参 考 文 献

- 1 吴家龙. 弹性力学. 上海: 同济大学出版社, 1993. 510 ~ 519
- 2 夏志皋. 塑性力学. 上海: 同济大学出版社, 1991. 199 ~ 201
- 3 Chen Huifa 著. 极限分析与土体塑性. 詹世斌译. 北京: 人民交通出版社, 1995. 195 ~ 198
- 4 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989. 191 ~ 195

Ultimate Bearing Capacity of Purely Cohesive Null-Gravity Soil on a Circular Foundation

Peng Xinqian

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract In relation to the plastic flow of purely cohesive null-gravity soil under the action of a circular foundation, the author assumes a stress field which satisfies basically allowable equilibrium and a velocity field which satisfies completely allowable motion; and solves the analytical solution of ultimate bearing capacity of that foundation by applying the principle of virtual power. This is a concise method with result in higher accuracy, as compared with that of numerical integration computation. It may serve as a reference to engineering design.

Keywords purely cohesive null-gravity soil, plastic flow, ultimate bearing capacity