第20卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.20 No.2
1999年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr.1999

特殊非线性递推数列的通项求法*

江莹茵 卢旋珠 陈增政

(福州大学数学系, 福州 350002)

摘要 研究级数通常以通项为基础, 而对某些通项用方程满足的关系式给出时, 如何求解通项的表达式则很少见到有关的结论. 文中对两种特殊非线性递推关系数列的通项的求法进行探索, 利用参数替换和借助差分方程给出两种通项的简单求法, 并得到其在判断级数敛散性和求解数列极限上的一些应用.

关键词 递推数列, 通项, 简单解法

分类号 O 173

级数的研究, 往往都是以通项为基础. 可见如何确定通项的探讨, 是一项重要的研究内容. 我们见到的级数不外乎是明确的或凭经验给出通项表达式. 如级数 1 为 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$; 级数 2 为 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$; 级数 3 为 $0+1+0+1+\cdots$. 对级数1 易知通项 $u_n=\sin nx$; 级数 2, 3 凭观察知其通项 $u_n=\frac{1}{n}$, $u_n=\begin{cases}0 & n\ 为奇数\\ 1 & n\ 为偶数\end{cases}$. 但如果通项用方程满足的关系式给出时, 如何求通项表达式则很少见到有关的结论. 为此, 本文对如下两种情况给出具体的求法.

情况 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的通项满足关系式

$$u_{n+1}u_n+Au_{n+1}+Bu_n+C=0, \tag{1}$$

其中 A, B, C 为常数, $(A+B)^2=4C\neq 0$; $n=0, 1, 2, \cdots$. u_1 为已知, 则有

结论 1 选取满足关系式

$$\left.\begin{aligned}\alpha+1&=A,\\ \alpha-1&=B,\\ \alpha^2&=C\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的 α, 则可求出通项 u_n 的表达式.

证明 以式(2)代入式(1), 得 $u_{n+1}u_n+(\alpha+1)u_{n+1}+(\alpha-1)u_n+\alpha^2=0$, 移项得 $u_n=u_{n+1}u_n+\alpha u_{n+1}+\alpha u_n+u_{n+1}+\alpha^2$. 等式两边同时加 α, 得 $u_n+\alpha=u_{n+1}u_n+\alpha u_{n+1}+\alpha u_n+u_{n+1}+\alpha^2+\alpha=(u_{n+1}+\alpha)(u_n+\alpha+1)$. 化简后, 得

$$\frac{1}{u_{n+1}+\alpha}=\frac{1}{u_n+\alpha}+1. \tag{3}$$

---

* 本文 1998-12-16 收到

令 $V_n=\frac{1}{u_n+\alpha}$, 则式(3)化为

$$V_{n+1}=V_n+1 \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{4}$$

显然, 式(4)是以 V_1 为首项, 公差为 1 的等差数列, 从而有 $V_n=V_1+(n-1)\times 1=V_1+n-1$. 由 $V_n=\frac{1}{u_n+\alpha}$, 知 $u_n=\frac{1}{V_1+n-1}-\alpha$, 其中 $V_1=\frac{1}{u_1+\alpha}$代入上式得

$$u_n=\frac{1}{\frac{1}{u_1+\alpha}+n-1}-\alpha. \tag{5}$$

推论 1 由式(2)知 $\alpha=\frac{2C}{A+B}$.

推论 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

例 1 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$(其中 u_n 满足关系式 $u_{n+1}u_n-u_{n+1}+3u_n+4=0$, 且 $u_1=3$)是发散的.

证明 由推论 1 选取 $\alpha=-2$, 满足式(2). 由式(5)知 $u_n=\frac{1}{n}+2$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2\neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

结论 2 对式(1)选取满足关系式

$$\left.\begin{aligned}\alpha+1&=B,\\ \alpha-1&=A,\\ \alpha^2&=C\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

的 α, 其通项为

$$u_n=\frac{1}{\frac{1}{u_1+\alpha}+1-n}-\alpha. \tag{7}$$

例 2 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$(其中 u_n 满足关系式 $u_{n+1}u_n-6u_{n+1}-4u_n+25=0$, 且 $u_1=7$)是发散的.

证明 选取 $\alpha=-5$ 满足式(6). 由式(7)知 $u_n=\frac{2}{3-2n}+5$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=5\neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

情况 2 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的通项满足关系式

$$Au_n+Bu_{n-1}+Cu_{n-2}+Du_nu_{n-1}+Eu_nu_{n-2}Fu_{n-1}u_{n-2}=0, \tag{8}$$

其中 A,B,C,D,E,F 为常数, $n=0,1,2,\cdots$. u_1,u_2 为已知, 则有

结论 3 对式(8)总可以化为

$$u_n=au_{n-1}u_{n-2}+bu_nu_{n-1}+cu_nu_{n-2}+du_{n-1}+eu_{n-2}. \tag{9}$$

若式(9)满足

$$c=-ad, b=-ae, (且 d+e\neq 1, d\neq 2), \tag{10}$$

则可求出通项 u_n 表达式.

证明　不妨设 $a\neq 0$, 此时可取 $\alpha=\frac{1}{a}$, $p=d$, $q=e$. 由式(10)可知 $a=\frac{1}{\alpha}$, $c=-\frac{p}{\alpha}$, $b=-\frac{q}{\alpha}$, $d=p$, $e=q$, $p+q=1$, 把它们代入式(9), 得

$$u_n=\frac{1}{\alpha}u_{n-1}u_{n-2}-\frac{q}{\alpha}u_nu_{n-1}-\frac{p}{\alpha}u_nu_{n-2}+pu_{n-1}+qu_{n-2}.$$

两边同乘 α, 得

$$\begin{aligned}\alpha u_n&=u_{n-1}u_{n-2}-qu_nu_{n-1}-pu_nu_{n-2}+\alpha pu_{n-1}+\alpha qu_{n-2}=\\&u_{n-1}u_{n-2}+\alpha(1-q)u_{n-1}+\alpha(1-p)u_{n-2}-pu_nu_{n-2}-qu_nu_{n-1}=\\&u_{n-1}u_{n-2}+\alpha u_{n-1}+\alpha u_{n-2}-pu_nu_{n-2}-qu_nu_{n-1}-\alpha pu_{n-2}-q\alpha u_{n-1}.\end{aligned}$$

移项得

$$u_{n-1}u_{n-2}+\alpha u_{n-1}+\alpha u_{n-2}=pu_nu_{n-2}+qu_nu_{n-1}+\alpha u_n+\alpha pu_{n-2}+\alpha qu_{n-1}.$$

两边同时加 α^2, 得

$$\begin{gathered}u_{n-1}u_{n-2}+\alpha u_{n-1}+\alpha u_{n-2}+\alpha^2=\\pu_nu_{n-2}+qu_nu_{n-1}+\alpha u_n+\alpha pu_{n-2}+\alpha qu_{n-1}+\alpha^2.\end{gathered}$$

即 $(u_{n-1}+\alpha)(u_{n-2}+\alpha)=(u_n+\alpha)(pu_{n-2}+qu_{n-1}+\alpha)=(u_n+\alpha)[pu_{n-2}+qu_{n-1}+\alpha(p+q)]=(u_n+\alpha)[p(u_{n-2}+\alpha)+q(u_{n-1}+\alpha)]$. 化简后得

$$\frac{1}{u_n+\alpha}=\frac{p}{u_{n-1}+\alpha}+\frac{q}{u_{n-2}+\alpha}.\tag{11}$$

令 $V_n=\frac{1}{u_n+\alpha}$, 则式(11)化为

$$V_n=pV_{n-1}+qV_{n-2},\tag{12}$$

其中 $p+q=1$. 对式(12), 据文[1, 2]介绍可知其解法. 此时二阶线性差分方程的特征方程为

$$V^2-pV-q=0.$$

即 $V^2-pV-(1-p)=0$, 解得 $V_1=1$, $V_2=p-1$, 故 $V_n=\alpha(p-1)^n+\beta$ (α,β 为待定系数). 而由

$$\left.\begin{aligned}\alpha(p-1)+\beta&=V_1,\\\alpha(p-1)^2+\beta&=V_2,\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中 $V_1=\frac{1}{u_1+\alpha}$, $V_2=\frac{1}{u_2+\alpha}$. 解得 $\alpha=\frac{V_2-V_1}{((1-p)(2-p)}=\frac{V_2-V_1}{q(2-p)}$, $\beta=\frac{(1-p)V_1+V_2}{2-p}=\frac{qV_1+V_2}{2-p}$, $(p\neq 2)$, 故

$$V_n=\frac{V_2-V_1}{q(2-p)}(p-1)^n+\frac{qV_1+V_2}{2-p}.\tag{14}$$

而由 $V_n=\frac{1}{u_n+\alpha}$, 得

$$u_n=\frac{1}{V_n}-\alpha\qquad(n=1,2,3\cdots).\tag{15}$$

例 **3**　试判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性, 其中 u_n 满足如下关系式:

$$6u_{n-1}u_{n-2}-4u_nu_{n-1}-2u_nu_{n-2}+u_{n-1}+2u_{n-2}-3u_n=0.$$

已知 $u_1=2$, $u_2=1$, 则关系式可化为

$$u_n = 2u_{n-1}u_{n-2} - \frac{4}{3}u_n u_{n-1} - \frac{2}{3}u_n u_{n-2} + \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{3}u_{n-2}.$$

对照条件式(10),说明其满足要求. 因此, 取$\alpha=\frac{1}{2}, p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3}$, 由式(13)知$V_1=\frac{2}{5}, V_2=\frac{2}{3}$. 代入式(14), 得$V_n=\frac{6}{25}(-\frac{2}{3})^n+\frac{14}{25}$. 由式(15)得

$$u_n = \frac{25}{6(-\frac{2}{3})^n + 14} - \frac{1}{2}.$$

由于$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 故级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

上述结论还可用来求极限, 仅以例4加以说明.

例 **4**　给定实数列$x_n=\frac{1}{3}x_{n-1}x_{n-2}-\frac{1}{4}x_n x_{n-1}-\frac{1}{12}x_n x_{n-2}+\frac{1}{4}x_{n-1}+\frac{3}{4}x_{n-2}$. 已知$x_1=-2$, $x_2=-4$, 试求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

对照式(10), 例4符合要求, 故取$\alpha=3, p=\frac{1}{4}, q=\frac{3}{4}$. 由$V_1=\frac{1}{x_1+\alpha}=1, V_2=\frac{1}{x_2+\alpha}=-1$, $V_n=-\frac{32}{21}(-\frac{3}{4})^n-\frac{1}{7}$, 可推知$u_n=\frac{21}{-32(-\frac{3}{4})^n-3}-3$. 因此, $\lim_{n\to\infty}x_n=-10$.

参　考　文　献

1　Lin C L 著. 离散数学基础. 刘振宏译. 北京: 人民邮电出版社, 1982. 258～266

2　菲赫金哥尔茨 T M 著. 微积分学教程. 北京大学高等数学教研室译. 北京: 人民教育出版社, 1957. 355～459

A Method for Solving General Term of Special Nonlinear Number Sequence with Recurrence Relations

Jiang Yingying　Lu Xuanzhu　Chen Zengzheng

(Dept. of Math., Fuzhou Univ., 350003, Fuzhou)

Abstract　Generally, the series is studied with the general term as basis. While some general terms are given in the form of relational expression which equation satisfies, the conclusions on how to solve the expression of general term are seldom seen. In exploring two solutions of the general term of special nonlinear number sequence with recurrence relations, the author gives two simple solutions of general term by applying parameter transformation and difference equation; and obtains some applications of the results on judging convergence and divergence of series and on the limit to the solution of sequence.

Keywords　recurrence sequence, general term, simple solution