第 20 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 20　No. 2
1999 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 1999

对流-扩散方程的两类交替方法之比较*

曾　文　平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　以求解对流-扩散方程的中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式和修正 Dennis 格式为基础, 构造了若干新的交替分组显式方法与交替方向显式方法, 给出了它们的实验模型的数值比较结果.

关键词　对流-扩散方程, 交替分组显式方法, 交替方向显式方法

分类号　O 241. 82

本文考虑对流-扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = \epsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1, t > 0), & (1) \\ u(x,0) = f(x) & (0 \le x \le 1), & (2) \\ u(0,t) = g_1(t), u(1,t) = g_2(t) & (t > 0), & (3) \end{cases}$$

其中 a 为常数, $\epsilon > 0$ 为小参数. 对流-扩散方程是描述粘性流体运动的非线性方程——Burgers 方程的线性化模型, 且它们本身也描述了许多自然现象. 因此, 求解对流-扩散方程的计算方法深受重视且目前已有很多算法. 在这些算法中, 显式格式的稳定性限制较苛刻, 而隐式算法虽不受稳定性限制但要求解线代数方程组, 故这些算法均不适合于在并行机和向量机上实现. 针对这一问题, Evans [1]首先对线性抛物型(扩散) 方程提出了分组显式差分格式. 由于该格式既无稳定性条件限制, 又可显式计算, 故一直受到重视. 许多学者将其推广到双曲型方程、Burgers 方程等. 但许多分组显式格式 [1,2] 在相容性方面往往受到网格比的限制, 即要求当 $\tau, h\to 0$ 且 $\dfrac{\tau}{h}\to 0$ 时才相容(其中 τ, h 分别为时间和空间步长). 针对上述存在问题, 本文将利用文献[3]的思想, 把对流-扩散方程常见的四种显式格式——中心差分格式、显式逆风格式、Samarskii 格式及修正 Dennis 格式, 改造为一类新的半隐式差分格式. 进而, 构造相应的交替方向(ADE) 格式及交替分组显式(AGE) 格式. 最后, 给出 AGE 格式及 ADE 格式的实验模型的数值比较结果. 顺便指出本文结果也可推广到非线性 Burger 方程, 将另文讨论.

1　ADE 格式(交替方向显式格式)

对区间[0, 1] 取均匀网格点 $x_j = jh, j = 0, 1, \cdots, m, mh = 1; t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \cdots$. 对流-扩散方程(1) 有 4 种常见格式 [4]. (1) 中心差分格式为

* 本文 1998-08-02 收到; 福建省自然科学基金资助项目

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{4}$$

(2) 显式逆风格式, 即

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon\left(1+\frac{1}{2}R_\Delta\right)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}, \tag{5}$$

其中 $R_\Delta=ah/\epsilon$ 为网格 Reynolds 数. (3) 显式 Samarskii 格式为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}R_\Delta}+\frac{1}{2}R_\Delta\right)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{6}$$

(4) 修正 Dennis 格式为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}R_\Delta+\frac{1}{6}R_\Delta^2}+\frac{1}{2}R_\Delta\right)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{7}$$

格式(4)～(6)可统一写为 $u_j^{n+1}=u_j^n-P(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+Q(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$, 其中

$$P=\frac{a\tau}{2h}=r\frac{ah}{2}\qquad r=\tau/h^2, \tag{8}$$

$$Q=\begin{cases}\epsilon r & \text{中心差分格式,}\\ \epsilon r\left(1+\frac{1}{2}R_\Delta\right) & \text{显式逆风格式,}\\ \epsilon r\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}R_\Delta}+\frac{1}{2}R_\Delta\right) & \text{Samarskii 格式,}\\ \epsilon r\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}R_\Delta+\frac{1}{6}R_\Delta^2}+\frac{1}{2}R_\Delta\right) & \text{修正Dennis 格式.}\end{cases} \tag{9}$$

由此给出方程(1)的相应的半隐式差分格式

$$u_j^{n+1}-Q(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1})=U_j^{n+1}-Q(u_j^n-u_{j-1}^n) \tag{10}$$

及

$$u_j^{n+1}+Q(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})=U_j^n+Q(u_{j+1}^n-u_j^n), \tag{11}$$

式中 $U_j^n=u_j^n-P(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)$.

从上述公式可以给出如下的半显式算法: (Ⅰ) RL 公式(从右往左计算)为

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{1+Q}\{Qu_{j+1}^{n+1}+(1-Q)u_j^n+(P+Q)u_{j-1}^n-Pu_{j+1}^n\}; \tag{12}$$

(Ⅱ) LR 公式(从左往右计算)为

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{1+Q}\{Qu_{j-1}^{n+1}+(1-Q)u_j^n+(P-Q)u_{j+1}^n+Pu_{j-1}^n\}; \tag{13}$$

(Ⅲ) ADE 格式(交替方向显式格式)为

$$\left.\begin{aligned}u_j^{n+1}&=\frac{1}{1+Q}\{Qu_{j+1}^{n+1}+(1-Q)u_j^n+(P+Q)u_{j-1}^n-Pu_{j+1}^n\},\\ u_j^{n+2}&=\frac{1}{1+Q}\{Qu_{j-1}^{n+2}+(1-Q)u_j^{n+1}+(P-Q)u_{j+1}^{n+1}+Pu_{j-1}^{n+1}\}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

2　GE 格式(分组显式格式)

为形成分组显式格式, 将(x_j, t_{n+1})及(x_{j+1}, t_{n+1})分成一组, 在点(x_j, t_{n+1})用格式(10), 在点(x_{j+1}, t_{n+1})用格式(11). 于是, 有如下的 2×2 方程组, 即

$$\begin{cases} (1+Q)u_j^{n+1} - Qu_{j+1}^{n+1} = U_j^n - Q(u_j^n - u_{j-1}^n), & (15) \\ -Qu_j^{n+1} + (1+Q)u_{j+1}^{n+1} = U_j^n + Q(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n). & (16) \end{cases}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1+Q & -Q \\ -Q & 1+Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^{n+1} \\ u_{j+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_j^n - Q(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ U_j^n + Q(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

易知

$$\begin{bmatrix} 1+Q & -Q \\ -Q & 1+Q \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+2Q} \begin{bmatrix} 1+Q & Q \\ Q & 1+Q \end{bmatrix}.$$

所以, 式(17) 可以显式地表示为

$$\begin{bmatrix} u_j^{n+1} \\ u_{j+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+2Q} \begin{bmatrix} 1+Q & Q \\ Q & 1+Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j^n - Q(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ U_j^n + Q(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

式中 $U_j^n = u_j^n - P(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$. 对不成组的内点, 则单独给出: 右不成组点为

$$u_{m-1}^{n+1} = \frac{1}{1+Q}\{Qu_m^{n+1} + U_{m-1}^n - Q(u_{m-1}^n - u_{m-2}^n)\}; \tag{19}$$

左不成组点为

$$u_1^{n+1} = \frac{1}{1+Q}\{Qu_0^{n+1} + U_1^n + Q(u_2^n - u_1^n)\}. \tag{20}$$

利用上述计算公式, 可以形成如下的 GE 算法.

(a) m 为偶数. (1) *GER*(靠右边界的内点为不成组点) 对左起的 m－2 个内点用格式(18), 对最后 1 个内点则用格式(19). (2) *GEL*(靠左边界的内点为不成组点) 对左起的第 1 个内点用格式(20), 其余 m－2 个内点依次分为$\frac{1}{2}$(m－2) 组, 用格式(18). (3) (*S*)*AGE*(单交替分组显式格式) 在第 n+1 时间层上用 *GER* 格式, 在第 n+2 时间层上用 *GEL* 格式. (4) (*D*)*AGE*(双交替分组显式格式) 依下列次序运用 *GER* 和 *GEL* 算法: *GER*→*GEL*→*GEL*→*GER*.

(*b*) *m* 为奇数. 内点为 *m*－1 个(偶数), 可以形成如下 GE 算法. (1) GEC(完全分组显式格式) 分内点为两个点一组共分为$\frac{1}{2}(m-1)$组, 每组内点均采用格式(18). (2) GEU(靠近左右边介点的两个内点不成组) 靠近右边介点的内点采用格式(19), 靠近左边介的内点则采用格式(20), 其余内点则分为$\frac{1}{2}(m-3)$组, 在每成组点上采用格式(18). 由 GEC 和 GEU 可如前构造出(S)AGE 和(D)AGE 格式. 由于 *m* 为偶数和奇数情况类似下面仅考虑 *m* 为偶数情况.

3　数值试验

考虑如下对流-扩散方程初边值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t > 0), \tag{21}$$

$$u(x,0) = e^{-x} \qquad (0 \le x \le 1), \tag{22}$$

$$u(0,t) = e^{(\epsilon-a)t}, u(1,t) = e^{-x+(\epsilon-a)t} \qquad (t > 0), \tag{23}$$

其精确解为

$$u(x,t) = e^{-x+(\epsilon-a)t} \qquad (0 \le x \le 1, t > 0). \tag{24}$$

取 $a=\pm 1, \epsilon = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-9}, \tau = 0.001, h = 0.05, m = 1/h = 20$, 按(D)AGE 格式及 ADE 格式计算到 N= 100 层, 列表比较如表 1, 2 所示. 表中 $s = \{\sum_{j=1}^{m}(u_j^N - u(x_j, t_N))^2\}^{1/2}$ 表示离散平方误差. u_j^N 及 $u(x_j, t_N)$ 分别表示相应的差分格式解及精确解在点(x_j, t_N)的值. 表中 U–AGE2(U–ADE2), S–AGE2(S–ADE2), M–AGE2(M–ADE2), 分别表示基于逆风格式、Samarskii 格式和修正 Dennis 格式的(D)AGE(ADE)方法(基于中心差分格式的(D)AGE(ADE),其方法结果精度较差未予列出).

表 1　结果比较 $a = 1, \tau = 0.001, h = 0.05, N = 100$

ϵ	x_j	精确解	U–AGE2	U–ADE2	S–AGE2	S–ADE2	M–AGE2	M–ADE2
10^{-1}	0.15	0.786 628	0.881 027	0.491 669	0.620 311	0.656 321	0.888 151	0.927 975
10^{-1}	0.50	0.554 327	0.676 588	0.515 316	0.657 723	0.651 931	0.606 181	0.689 623
10^{-1}	0.85	0.390 628	0.466 209	0.260 722	0.485 413	0.413 327	0.395 706	0.481 624
	s		0.999 015	2.439 970	0.675 360	0.542 582	0.423 041	0.542 171
10^{-3}	0.15	0.778 879	0.781 651	0.622 254	0.845 516	0.772 862	0.936 055	0.951 056
10^{-3}	0.50	0.548 867	0.544 966	0.409 827	0.672 335	0.648 332	0.659 120	0.684 166
10^{-3}	0.85	0.386 780	0.387 527	0.272 811	0.463 627	0.447 504	0.398 264	0.482 133
	s		0.041 028	1.314 196	0.598 113	0.590 236	0.688 046	0.583 740
10^{-5}	0.15	0.778 802	0.781 042	0.771 834	0.854 622	0.772 953	0.936 058	0.951 048
10^{-5}	0.50	0.548 812	0.544 409	0.542 389	0.672 456	0.648 301	0.659 524	0.684 166
10^{-5}	0.85	0.386 741	0.387 012	0.387 830	0.464 061	0.447 535	0.398 161	0.482 134
	s		0.042 282	0.054 609	0.598 605	0.590 812	0.639 307	0.583 974
10^{-9}	0.15	0.778 801	0.781 042	0.771 853	0.845 618	0.772 933	0.936 058	0.951 048
10^{-9}	0.50	0.548 812	0.544 409	0.542 407	0.672 453	0.648 388	0.659 124	0.684 166
10^{-9}	0.85	0.386 741	0.387 012	0.387 848	0.464 005	0.447 501	0.398 161	0.482 137
	s		0.042 281	0.054 474	0.598 736	0.590 916	0.639 108	0.593 977

表 2　结果比较 $a = -1, \tau = 0.001, h = 0.05, N = 100$

ϵ	x_j	精确解	U–AGE2	U–ADE2	S–AGE2	S–ADE2	M–AGE2	M–ADE2
10^{-1}	0.15	0.960 789	1.038 176	0.648 119	0.626 454	0.674 373	0.635 974	0.782 340
10^{-1}	0.50	0.667 057	0.769 990	0.679 207	0.657 767	0.652 005	0.495 985	0.543 890
10^{-1}	0.85	0.477 114	0.527 352	0.337 917	0.488 601	0.418 037	0.064 910	0.401 679
	s		0.763 918	2.828 432	0.912 301	0.768 183	1.206 843	0.573 645
10^{-3}	0.15	0.951 325	0.966 821	0.798 442	0.856 800	0.775 036	0.767 344	0.765 401
10^{-3}	0.50	0.670 387	0.670 031	0.517 428	0.672 325	0.648 324	0.541 185	0.539 061
10^{-3}	0.85	0.472 414	0.471 576	0.336 864	0.463 863	0.447 556	0.213 721	0.384 119
	s		0.069 432	1.416 869	0.486 509	0.720 238	0.821 698	0.611 334
10^{-5}	0.15	0.951 230	0.966 671	0.974 072	0.856 950	0.755 143	0.767 246	0.765 401
10^{-5}	0.50	0.670 321	0.669 891	0.674 079	0.672 427	0.648 380	0.541 189	0.539 061

续表 2

ϵ	x_j	精确解	U-AGE2	U-ADE2	S-AGE2	S-ADE2	M-AGE2	M-ADE2
10^{-5}	0.85	0.472 367	0.471 452	0.473 234	0.464 201	0.447 500	0.213 692	0.384 113
	s		0.067 228	0.104 187	0.486 511	0.720 186	0.891 999	0.611 031
10^{-9}	0.15	0.951 229	0.966 671	0.974 094	0.856 930	0.775 134	0.767 346	0.765 401
10^{-9}	0.50	0.670 320	0.669 871	0.674 100	0.672 424	0.648 356	0.541 189	0.539 061
10^{-9}	0.85	0.472 367	0.471 452	0.473 254	0.464 133	0.447 501	0.213 692	0.384 113
	s		0.067 232	0.104 329	0.486 546	0.720 593	0.891 998	0.611 027

数值结果表明, 对这个模型问题而言, 这些格式对高 Reynolds 数也是有效的. 而 U-AGE2(S-AGE2). 与 M-AGE2 格式高于相应的 U-ADE2(S-ADE2) 与 M-AGE2 格式. 在所有格式中, 当 $\epsilon=10^3$ 时, 以 MADE2 格式精度最高; 而当 $\epsilon=10^{-3}\sim10^{-9}$(即高 Reynolds 数) 时, 以 U-AGE2 格式的精度最高. 顺便指出, 本文构造的两类格式在相容性方面均不受网比 τ/h 的限制.

参　考　文　献

1　Evans D J, Abdullah A R B. Group explicit method for parabolic equations. Int. J. Computer Math, 1983, (4): 73～105

2　王子丁, 陆金甫, 肖世江. Burgers 方程的一个分组显式格式. 计算物理, 1993, 10(4): 479～487

3　郑世荣. Transputer 并行计算机体系方案选择. 小型微型计算机系统, 1992(2): 1～8

4　陆金甫. 对流-扩散方程的一些单调性差分格式. 计算物理, 1991, 8(2): 157～164

Comparison of Two Classes of Alternating Methods for Solving Convection-Diffusion Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　Based on central difference scheme, explicit upwind scheme, Samarskii scheme and modified Dennis scheme, some new alternating group explicit methods and alternating direction explicit methods are constructed for solving convection-diffusion equation. Their experimental model and results of numerical comparison are given.

Keywords　convection-diffusion equation, alternating group explicit method, alternating direction explicit method