第 20 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 20　No. 2
1999 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 1999

局部紧群上取值在算子代数中的正定函数*

宋　海　洲

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　把有关数值连续正定函数表示的 Bochner 定理推广到更一般的情形, 并将证明从一个局部紧交换群到一个 C^*-代数的连续正定函数能够表示为向量值正测度的 Fourier 变换. 局部紧交换群到 C^*-代数的连续正定函数对 C^*-代数上的广义函数有重要作用. 同时给出一个具体应用, 推广 Bochner-Schwartz 定理至算子代数情形, 得到 $S(A)$ 上正定广义函数 θ 能表示为 $(\theta, \varphi) = \int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$.

关键词　局部紧交换群, 对偶群, 正定函数, C^*-代数

分类号　O 152

算子代数迅猛发展的同时[1,2], 非交换分析也发展很快, 人们希望算子代数上的广义函数理论为 C^*-代数上的微分方程提供强有力的工具. Matsumoto [3]推广许瓦兹的广义函数理论到具有 R^n-action 的算子代数上的广义函数, 并应用它解抽象微分方程. 正定广义函数为广义随机过程提供了强有力的工具, 使得我们去发展算子代数上的正定广义函数理论.

一个从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{C}$ 的数值函数 $f(t)$ 为正定, 当且仅当

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i - t_j)\xi_i \bar{\xi}_j \geq 0, \quad \forall t_i \in \mathbf{R}, \xi_j \in \mathbf{C} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

Bochner 证明了一个数值连续函数 $f(t)$ 正定, 当且仅当它是正有限测度的 Fourier 变换. 换句话说, $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{it\lambda}\mathrm{d}g(\lambda)$.

据文献 [3] 证明, 任意从 $\mathbf{R}$ 到一个 C^*-代数 A 连续正定函数能够表示为取值于 A'' 中的向量值正测度的 Fourier 变换. 当 C^*-代数 A 是一个 Von Neumann 代数 M 时, 连续正定函数能够表示为取值于 M 中的向量值正测度的 Fourier 变换. 我们推广这一结论到更一般的情形. 在此, 我们将给出从一个局部紧交换群到一个 C^*-代数 A 连续正定函数能够表示为向量值正测度的 Fourier 变换. 而且, 如果 $f(t)$ 是一个局部紧交换群 G 到 M 的连续函数时, $f(t)$ 正定当且仅当存在一个 $\hat{G}$ 上, 取值于 M 的向量值正测度 μ, 使得 $f(t) = \int_{\hat{G}} (t, \tau)\,\mathrm{d}\mu(\tau)$.

1　C^*-代数上的正定函数

我们推广 Bochner 定理, 即从一个局部紧交换群到一个 C^*-代数 A 连续正定函数情形(或从一个局部紧交换群到 M 的连续正定函数情形).

* 本文 1998-10-03 收到

我们特定一些记号, 如 A 为 C^*-代数, G 为局部紧交换群, $\hat{G}$ 为 G 的对偶群, $L_1(G)$ 为 G 上可积函数集, $K(G)$ 为 G 上带有紧支集的连续函数集. 且 Bochner 定理, 是一个数值连续函数正定当且仅当它是一个正有限测度的 Fourier 变换, 即 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dg(\lambda)$.

文献 [3] 把数值连续正定函数的 Bochner 定理推广到, 从 $\mathbf{R}$ 到一个 C^*-代数 A 连续正定函数情形. 一个从 $\mathbf{R}$ 到 C^*-代数 A 函数, 称为正定当且仅当

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i - t_j)\xi_i \bar{\xi}_j \geq 0, \quad \forall t_i \in \mathbf{R}, \quad \xi_i \in \mathbf{C} \quad (i,j = 1, 2, \cdots, n)$$

成立.

文献 [3] 的定理, 是如果 A 是一个 C^*-代数, $f(t)$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 A 连续正定函数, 那么存在 $\mathbf{R}$ 上的取值于 A^{**} 中的向量值正测定 μ 使得 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} d\mu(s)$.

定义 1　设 G 是一个局部紧交换群. 一个从 G 到 C^*-代数 A (或者 M) 函数称为正定当且仅当

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i t_j^{-1})\xi_i \bar{\xi}_j \geq 0, \quad \forall t_i \in G, \quad \xi_i \in \mathbf{C} \quad (i,j = 1, 2, \cdots, n)$$

成立.

定理 1　如果 A 是一个 C^*-代数, $f(t)$ 是从 G 到 A 连续正定函数, 那么存在 $\hat{G}$ 上的取值于 A^{**} 中的向量值正测度 μ, 使得

$$f(t) = \int_{\hat{G}} (t, \tau) d\mu(\tau),$$

其中 $\hat{G}$ 是 G 的对偶数.

证明　如果 $f(t)$ 是从 G 到 A 连续正定函数, 那么对 $\forall \rho \in A_+^*$, $\rho(f(t))$ 是一个连续正定函数, 也是一个有界函数 [4]. 由一致有界定理可得, 存在一个常数, M 使得 $\| f(t) \| \leq M$.

定义一个 Bochner 积分

$$\Phi(g) = \int_G f(t) g(t) dt, \quad \forall g \in K(G),$$

利用 $f(t)$ 正定性及算子代数一些性质 [5,6], 可得 $\Phi(\varphi \cdot \varphi^*) \geq 0$, $\forall \varphi \in L_1(G)$. 因此, Φ 是 $L_1(G)$ 到 A 的正映射.

引理 1　如果 Φ 是 $L_1(G)$ 到 C^*-代数的正映射, 那么 Φ 是完全正映射.

证明　假设 A 是一个 C^*-代数. 如果 Φ 是 $L_1(G)$ 到 A 的正映射, 那么转置 Φ^T (从 A^* 到 $L_\infty(G)$) 是一个正映射. 我们将证明 Φ^T 是完全正映射.

令 n 是一个正整数, (f_{ij}) 是 $A^* \otimes M_n$ 中的正元, 其中 $f_{ij} \in A^*$. 假设 $L_\infty(G) = C(X)$, 其中 X 是紧 Hausdorff 空间.

令 $g_{ij} = \Phi^T(f_{ij})$, 其中 $g_{ij} \in C(X)$. 为了证明 (g_{ij}) 是正元, 必须证明对 $\forall x \in X$, $(g_{ij}(X))$ 是正矩阵. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, 则

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\lambda_i \bar{\lambda}_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\lambda_i \bar{\lambda}_j(x) = \Phi^T\Big(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\lambda_i \bar{\lambda}_j\Big)(x),$$

由于 $(f_{ij}) \geq 0$ 等价于 $\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(a_i a_j^*) \geq 0$. 那么, 对 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ [7], 即

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\lambda_i \bar{\lambda}_j (a a^*) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}((\lambda_i a)(\lambda_j a)^*) \geq 0, \quad \forall a \in A.$$

故 $\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\lambda_i\bar{\lambda}_j \geq 0$ 成立, 则 $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\lambda_i\bar{\lambda}_j \geq 0$ 成立. 于是, 可得 Φ^{T} 是完全正映射, 即 Φ是完全正映射.

设 A 作用于Hilbert 空间 H, 由 Stinespring 定理[7]可知, 存在 $L_1(G)$ 上的表示$\{\pi, \mathbf{R}\}$和一个从 H 到 $\mathbf{R}$ 有界线性算子 V, 使得

$$\Phi(g) = V^{*}\pi(g)V, \quad \forall g \in L_1(G), \quad \mathbf{R} = [\pi(L_1)VH].$$

于是, 可得存在一个 $\mathbf{R}$ 上单参数酉群$\{U(t), t\in G\}$, 使得[8]

$$[\pi(g)x, y] = \int g(t)[U(t)x, y]\mathrm{d}t, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

由于

$$\int f(t)g(t)\mathrm{d}t = V^{*}\pi(g)\mathrm{d}t = V^{*}\pi(g)V,$$

应用 $L_1(G)$ 的近似单位元$\{h_i(tt_0^{-1})\}$及上式, 可得到 $f(t_0) = V^{*}U(t_0)V$.

既然 $f(t)$ 是连续的, 因此 $U(t)$ 是强连续的单参数酉群. 由 Stone 定理[9]可得存在一个谱测度$(E(\tau))$. 使得 $U(t) = \int_{\hat{G}}(t, \tau)\mathrm{d}E(\tau)$, 其中 $E(\tau) \in \overline{[\pi(g), g\in L_1]}^{(\omega)}$ [4]. 因此

$$f(t) = \int_{\hat{G}}(t, \tau)\mathrm{d}V^{*}E(\tau)V = \int_{\hat{G}}(t, \tau)\mathrm{d}\mu(\tau),$$

其中 $\mu(\tau) = V^{*}E(\tau)V, V^{*}E(\tau)V \in A$."

定理 **2** 如果 M 是一个 V.N. 代数, $f(t)$ 是从 G 到 M 的连续函数. 那么, $f(t)$ 正定的充分必要条件, 是存在一个 G 的对偶群 $\hat{G}$ 上的取值于 M 中的向量值正测度, 使得

$$f(t) = \int_{\hat{G}}(t, \tau)\mathrm{d}\mu(\tau).$$

证明 我们只需证明充分性. 如果存在一个 G 的对偶群 $\hat{G}$ 上的取值于 M 中的向量值正测度, 使得 $f(t) = \int_{\hat{G}}(t, \tau)\mathrm{d}\mu(\tau)$, 则对$\forall \xi\in\mathbf{C}(i= 1, 2, \cdots, n)$. 那么

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_it_j^{-1})\xi_i\bar{\xi}_j = \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\bar{\xi}_j\int_{\hat{G}}(t_it_j^{-1}, \tau)\mathrm{d}\mu(\tau) = \int_{\hat{G}}\left|\sum_{i,j=1}^{n}(t_i, \tau)\xi_i\right|^{2}\mathrm{d}\mu(\tau) \geq 0.$$

2 应用

应用上面的结论, 我们可推广Bochner-Schwartz 定理至算子代数情形.

设 A 是一个 C^{*}-代数, M 是一个 V.N. 代数, D 是具有紧支集无限次可微函数空间, S 是急速下降无限次可微函数空间. 因此, 我们记

$$D'(M)(D'(A)) = \{\theta \mid \theta\text{是从 } D \text{ 到 } M(A) \text{ 的线性连续泛函}\},$$
$$S'(M)(S'(A)) = \{\theta \mid \theta\text{是从 } S \text{ 到 } M(A) \text{ 的线性连续泛函}\}.$$

定义 **2** 设 A 是一个 C^{*}-代数, $\theta\in D'(A)$(或者 $S'(A)$); 如果对$\forall \varphi\in D$(或者 S), 有$\theta(\varphi\cdot\varphi^{*}) \geq 0$(在 A 中), 那么我们称 θ是正定的.

定义 **3** 设 A 是一个 C^{*}-代数, 一个向量值测度 $\mu(x)$($x\in R, \mu(x)\in A$)称为是缓和的, 因如果满足存在一个整数 P, 使得 $\int(1+|x|^{2})^{-P}\mathrm{d}\mu(x)$ 在 A 中收敛.

我们推广 Bochner-Schwartz 定理, 可得到如下定理.

定理 3　如果 A 是一个 C^*-代数, 那么每一个 $S'(A)$ 上正定广义函数 θ 能表示为

$$(\theta, \varphi) = \int \varphi(\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

其中 $\mu(\lambda)$ 是取值于 A' 的正向量值测度.

证明　(略).

定理 4　如果 M 是一个 V.N. 代数, 那么每一个 $S'(A)$ 上正定广义函数 θ 能表示为

$$(\theta, \varphi) = \int \varphi(\lambda)\, d\mu(\lambda),$$

其中 $\mu(\lambda)$ 是取值于 M 的正向量值测度.

证明　(略).

吴良森教授和颉火安老师提供了许多有益的建议, 特此致谢.

参　考　文　献

1 Matsumoto K. Periodic distrbution on C^*-algebra. J. of Math. Soc., 1995, 47(4): 10～20

2 张上泰. 算子方程解的存在性. 华侨大学学报(自然科学版), 1995, 16(3): 245～249

3 Wang Liangsen. 算子代数上的正定函数. 数学年刊, 1997, 18(A2): 187～192

4 Gel'find I M, Vilenkin N Y. Generalized function(4). New York: Academic Press, 1964. 11～30

5 Kadison R, Rigrose J. Fundamental of operator algebras(1, 2). New York: Academic Press, 1986. 258～260

6 Dixmier J. C^*-algebra. New York: North-Holland Publishing Company, 1977. 286～290

7 Takesaki M. Theory of operator algebras(I). New York: Spring Verlag, 1979. 195～196

8 Sterling K B. Lecture in functional analysis and operator theory. New York: Spring Verlag, 1973. 310～312

9 Pedersen G K. C^*-algebra and their automorphism groups. New York: Academic Press, 1979. 312～313

Positive-Definite Function from a Locally Compact Abelian Group to a C^*-Algebra

Song Haizhou

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　In relation to the representation of positive definite function on numerical value, the author extends its Bochner theorem to the more general situation. As it will be proved, the continuous positive definite function from a locally compact Abel group to a C^*-algebra can be represented as Fourier transform of vectrovalued positive measure; and the continuous positive definite function from locally compact Abel groups to C^*-algebra will play an important role in geeneralized function of C^*-algebra. Moreover, a specific application is given. Bochner-schwartz theorem is extented to C^*-algebra, and the positive-definite generalized function θ can be represented as $(\theta, \varphi) = \int \varphi(\lambda)\, d\mu(\lambda)$.

Keywords　locally compact Abel groups, dual group, positive definite function, C^*-algebra