第20卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol 20 No. 2
1999年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1999

Weibull 分布步加应力寿命试验统计分析*

吴绍敏 程细玉
(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 在Weibull分布场合, 排除形状参数与加速应力无关的限制, 进行步加应力寿命试验的统计分析, 给出正常应力水平下寿命分布参数及变异系数估计.

关键词 Weibull分布, 步进应力, 加速寿命试验
分类号 O 213.2

1 问题的提出

问题1 加速寿命试验的可靠性统计分析, 一般作如下Ⅰ～Ⅲ的假定[1]. (1) 假定Ⅰ. 产品在应力水平$S_1< S_2< \cdots< S_k$的加速条件下, 其寿命分布类型与正常应力水平S_0条件下的寿命分布类型相同, 即$T_i\sim F(\frac{t-\mu_i}{\sigma_i})$ $i=\overline{0,k}$. (2) 假定Ⅱ. $\sigma_0=\sigma_1=\cdots=\sigma_k$, 即形状参数与应力变化无关. (3) 假定Ⅲ. 位置参数μ与所加应力S的关系, 有$\mu=a+b\varphi(s)$, 其中$\varphi(s)$是应力S的某已知函数.

假定Ⅰ有道理, 因加速寿命试验时, 选择的应力水平必须保"失效机理不变", 首先反应在分布函数类型不变, 否则无法进行分析. 假定Ⅲ是由试验总结出来的统计模型, 是有根据的, 且是失效机理是否变化的反应[2], 是不可缺少的.

假定Ⅱ似乎根据不足, 至少不能令人信服. (1) 在应力水平$S_i(i=\overline{0,k})$上产品的寿命$T_i\sim F(\frac{t-\mu_i}{\sigma_i})$, 当$i\neq j$时, $T_i\neq T_j$就该有$\mu_i\neq\mu_j$; $\sigma_i\neq\sigma_j$, 故σ与应力的变化不会无关. (2) "假定"本身就不是真理, 它是科学工作者为获得某些结果的一种限制(或条件), 往往是可以排除或改变的, 限制越多结论的应用范围就越小. (3) "假定"不能决定试验数据的性质, 更不能作为检验"失效机理"是否变化的标准. (4) 如果Nelson的观点(形状参数与应力无关等价于"失效机理不变")是对的, 那么就不该用作假定, 应该作为统计分析结果的检验标准来使用. 根据上述理由, 本文将排除假定Ⅱ.

问题2 几乎所有的书籍和文献, 都是介绍图分析法, 简单线性无偏估计法和最佳线性无偏估计法. 这3种方法计算麻烦且要查许多数值表. 显然, 分析出来的结论误差大, 又难以推广应用. 由于最大似然估计具有许多优良性质, 因此本文将排除不合理的假定Ⅱ, 应用最大似

* 本文1998-09-28收到; 福建省自然科学基金资助项目

然估计法. 即在步进应力加速寿命试验下, 对Weibull 分布进行统计分析. 此方法简单且估计精度高.

2 引理与假定

引理 1 设 $T\sim F(t)=1-\exp\{1-(t/\eta)^m\}$, 则 $x=T^m\sim F_x(x)=1-\exp\{-\lambda x\}$, 其中 $\lambda=\eta^m$, 记 $\theta=1/\lambda=\eta^m$.

证明 $F_x(x)=P(X\le x)=P(T^m\le x)=P(T\le x^{1/m})=F(x^{1/m})=1-\exp\{-(\frac{x}{\eta^m})\}$ $=1-\exp\{-\lambda x\}$.

引理 2 设 $T\sim F(t)=1-\exp\{-(t/\eta)^m\}$, 则变异系数

$$C=(DT)^{1/2}/ET=\{\Gamma(1+2/m)/\Gamma^2(1+1/m)-1\}^{1/2}.$$

证明 见文[2]中引理 2.

假定Ⅰ 在正常应力水平 S_0 与加速应力水平 $S_1<S_2<\cdots<S_k$ 下, 产品寿命服从 $W(\eta, m_i, t)$, 其分布函数 $F_i(t)=1-\exp\{-(\frac{t}{\eta})^{m_i}\}$, $t\ge 0$, $(i=\overline{0,k})$, 其中 $m_i>0$ 是形状参数, $\eta>0$ 为特征寿命. 因若 $X\sim(1/\theta)\exp\{-x/\theta\}$, 则满足(阿伦尼斯方程) $\ln\theta=a+b\varphi(s)$. 所以, 由引理 1 可作

假定Ⅱ 若 $T\sim W(\eta, m, t)$, 则

$$\ln\theta=a+b\varphi(s),\ \theta=\eta^m. \tag{1}$$

特别当 $m=1$ 则 $T\sim W(\eta, l, t)$, 有

$$\ln\eta=a_1+b_1\varphi(s), \tag{2}$$

其中 $\varphi(s)$ 为应力 S 的某一已知函数. 式(1)与式(2)是两个线性统计模型.

假定Ⅲ 若产品的寿命分布为 $F(t)$, 在应力 S_i 下工作 t_i 时间的累积失效概率 $F_{S_i}(t)$, 相当于在应力 S_j 下工作 t_j 时间的累积失效概率 $F_{S_j}(t)$, 即 $F_{S_i}(t_i)=F_{S_j}(t_j)$, $i\ne j$.

引理 3 若在正常应力水平 S_0 及加速应力水平 $S_1<S_2<\cdots<S_k$ 下, 产品寿命服从指数分布 $F_i(t)=1-e^{-\lambda_i t}$ $t\ge 0$ $(i=\overline{0,k})$. 从一批产品中随机抽取几个作步加应力寿命试验, 在 S_i 水平试验到 T_i^*, 有 r_i 个失效, 其失效时间分别为 $t'_{i1}, t'_{i1}\cdots t'_{ir_i}$. 余下 $(n-R_i)$ 个未失效, 立即提高应力水平继续试验, 其中 $R_i=\sum_{j=1}^{i}r_j$, 记 $T'_i=\sum_{j=1}^{r_i}t'_{ij}+(n-R_i)T'_i$. 当定时截尾试验时, T'_i 为截尾时间, 定数截尾试验时, $T'_i=t'_{ir_i}$ $(i=\overline{1,k})$, 则在 S_i 水平下 λ_i 的似然函数为

$$L(r_iT'_i;\lambda_i)=\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_i T'_i},\qquad R_0=0\quad(i=\overline{1,k}). \tag{3}$$

证明 不妨设 $k=3$, 其余情况类似. 由假定Ⅲ, 有 $1-e^{-\lambda_i t_i}=1-e^{-\lambda_j t'_j}$ 立即得 $t'_i=\frac{\lambda_j}{\lambda_i}t'_j$. 由此可知在应力 S_j 下试验 t'_i 时间, 相当于在应力 S_j 下试验 $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}t'_j$ 时间. 利用此关系式, 将 S_2, S_3 上的数据折算成 S_1 上的数据: $t'_{11}t'_{12}\cdots t'_{1r_1}T'_1$; $t'_{1r_1+1}=T'_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t'_{21}$; $t'_{1r_1+2}=T'_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t'_{22}$, $\cdots$; $t'_{1r_1+r_2}=T'_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t'_{2r_2}$; $t'_{1r_1+r_2+1}=T'_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T'_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}t'_{31}$; $t'_{1r_1+r_2+2}=T'_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T'_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}t'_{32}$, $\cdots$;

$t'_{1r_1+r_2+r_3}=T'_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T'_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}t'_{3r_3}$. 因此, $t'_{11}, t'_{12}, \cdots, t'_{1r_1+r_2+r_3}$为$S_1$上的$(r_1+r_2+r_3)$个顺序统计量, $T'\triangleq T'_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T'_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}T'_3$为其试验截止时间, 故有$L(t'_{11}t'_{12}\cdots t'_{1r_1+r_2+r_3};\lambda_1)=[n!/(n-r_1-r_2-r_3)!]\lambda_1^{r_1+r_2+r_3}\exp\{-\lambda_1[\sum_{j=1}^{r_1+r_2+r_3}t'_{ij}+(n-r_1-r_2-r_3)T']\}$. 逆变换, 将$t'_{ij}(j=\overline{1,r_1+r_2+r_3})$化为原来的数据, 其中 jacobi 行列式为$|J|=(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{r_2}(\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^{r_3}$. 经整理, 可得$L(t'_{11}t'_{12}\cdots t'_{1r_1};t'_{21}\cdots t'_{2r_2};t'_{31}\cdots t'_{3r_3};\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=[n!/(n-r_1)!]\lambda_1^{r_1}e^{\lambda_1T'_1}[(n-r_1)!/(n-r_1-r_2-r_3)!]\cdot\lambda_2^{r_2}e^{\lambda_2T'_2}[(n-r_1-r_2)!/(n-r_1-r_2-r_3)!]\lambda_3^{r_3}e^{\lambda_3T'_3}$. 因此, 有$L(r_iT'_i;\lambda_i)=[(n-R_{i-1})!/(n-R_i)!]\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_iT'_i}$, $R_0=0$, $(i=\overline{1,3})$. $k>3$ 的情形可同样证明, 故$L(r_i,T'_i;\lambda_i)=\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}\cdot\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_iT'_i}$, $(i=\overline{1,3})$.

3　参数估计

(1) 应力水平S_i上参数η, m_i的最大似然估计.

引理　η, m_i的最大似然估计由方程组

$$\ln\eta=\frac{1}{m_i}\{\ln[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n-R_i)(T_i^*)^{m_i}]-\ln r_i\},\tag{4}$$

$$\frac{1}{m_i}=-\frac{\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij}+[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij}+(n-R_i)(T_i^*)^{m_i}\ln T_i^*]}{[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n-R_i)(T_i^*)^{m_i}]}\tag{5}$$

确定. 其中$t_{ij}(j=\overline{1,r_i})$为应力水平$S_i$上的失效数据, T_i^*为试验截止时间; 当定时截尾时, T_i^*为截尾时间, 当定数截尾时, $T_i^*=t_{ir_i}(i=\overline{1,k})$.

证明　设在每一水平上的试验数据为S_i: $t_{i1}, t_{i2}\cdots t_{ir_i}T_i^*(i=\overline{1,k})$产品寿命$T_i\sim F_{S_i}(t)=1-\exp\{-(t/\eta)^{m_i}\}$. 对每一个$S_i$上的数据作变换$T'\triangleq T^{m_i}$, 则由引理 1 可知相应得到的数据为指数分布$E(\lambda_i)$在水平$S_i$下的试验数据, $\lambda_i=\eta^{m_i}(i=\overline{1,k})$. 该变换不影响诸$R_i$, r_i, 再由引理 3 知$L(r_i,T_i';\lambda_i)=\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_iT'_i}$, $T'_i=\sum_{j=1}^{r_i}t'_{ij}+(n-R_i)T'_i$, $t'_{ij}=t_{ij}^{m_i}$, $T'_i=(T_i^*)^{m_i}$. 利用$t'_{ij}=t_{ij}^{m_i}$, 再把$L(r_i,T'_i,\lambda_i)$转换为Weibull分布的似然函数, Jacobi行列式$|J|=m_i^{r_i}[\prod_{j=1}^{r_i}t_{ij}]^{m_i-1}$, 则$L(r_i,T_i;m_i,\eta)=\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}\eta^{m_ir_i}\exp\{-\lambda_i[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n-R_i)(T_i^*)^{m_i}]\}m_i^{r_i}[\prod_{j=1}^{r_i}t_{ij}]^{m_i-1}$. 因此, $\ln L=-m_ir_i\ln\eta-r_i\ln m_i+(m_i-1)\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij}-\eta^{m_i}[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n-R_i)(T_i^*)^{m_i}]+\ln\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}$. 令$\frac{\partial\ln L}{\partial\eta}=0$, 得

$$\eta^{m_i}=\frac{1}{r_i}[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n-R_i)(T_i^*)^{m_i}],\tag{6}$$

或

$$\ln\eta_i=\frac{1}{m_i}\{\ln[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m_i}+(n-R_i)(T_i^*)^{m_i}]-\ln r_i\}.\tag{7}$$

令$\frac{\partial \ln L}{\partial m_i} = 0$,得

$$-r_i\ln\eta_i + \frac{r_i}{m_i} + \sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} - \eta_i^{-m_i}\{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij} + (n-R_i)(T_i^*)^{m_i}\ln T_i^*\} +$$

$$[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n-R_i)(T_i^*)^{m_i}]\eta_i^{-m_i}\ln\eta_i = 0. \tag{8}$$

把式(7)代入(8),经整理后得

$$\frac{1}{m_i} = -\frac{\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} + \{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij} + (n-R_i)(T_i^*)^{m_i}\ln T_i^*\}}{[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n-R_i)(T_i^*)^{m_i}]}. \tag{9}$$

由式(6),(9)知定理成立. 应用时只要对式(5)进行迭代,求出$\hat{m}_i$,进而由式(4)求得$\hat{\eta}_i$.

(2) η_0 的估计. 由假定Ⅱ $\ln\eta = a_1 + b_1\varphi(s)$,利用数据组$(\ln\hat{\eta}_i, \varphi(s_i))$,$i=\overline{1,k}$,由最小二乘法可求得 $\hat{a}_1 = \overline{\ln\eta} - \hat{b}_1\overline{\varphi}$,$\hat{b}_1 = [\sum_{i=1}^{k}\ln\hat{\eta}_i\varphi(s_i) - k\,\overline{\ln\eta}\,\overline{\varphi}] / [\sum_{i=1}^{k}\varphi^2(s_i) - k\,\overline{\varphi}^2]$,其中$\overline{\ln\eta} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln\hat{\eta}_i$,$\overline{\varphi} = \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\varphi(s_i)$. 因此 $\ln\hat{\eta}_0 = \hat{a}_1 + \hat{b}_1\varphi(s_0)$,即 $\hat{\eta}_0 = \exp\{\hat{a}_1 + \hat{b}_1\varphi(s_0)\}$.

(3) m_0 的估计. 记 $\hat{\theta}_i = \hat{\eta}_i^{\hat{m}_i}$,由假定Ⅱ知 $\ln\theta = a + b\varphi(s)$. 因此应用数据组$(\ln\hat{\theta}_i, \varphi(s_i))$ $i=\overline{1,k}$ 按最小二乘法,可得 $\hat{a} = \overline{\ln\theta} - \hat{b}\overline{\varphi}$,$\hat{b} = [\sum_{i=1}^{k}\ln\hat{\theta}_i\varphi(s_i) - k\,\overline{\ln\theta}\cdot\overline{\varphi}] \div [\sum_{i=1}^{k}\varphi^2(s_i) - k\overline{\varphi}^2]$,$\overline{\ln\theta} = \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\ln\hat{\theta}_i$,则 $\ln\hat{\theta} = \hat{a} + \hat{b}\varphi(s)$,$\ln\hat{\theta}_0 = \hat{a} + \hat{b}\varphi(s_0)$,$\hat{\theta}_0 = \hat{\eta}_0^{\hat{m}_0}$,$\hat{m}_0 = \frac{\hat{a} + \hat{b}\varphi(s_0)}{\hat{a}_1 + \hat{b}_1\varphi(s_0)}$.

(4) 变异系数估计为 $\hat{c}_0 = \{\Gamma(1+\frac{2}{\hat{m}_0}) / \Gamma^2(1+\frac{1}{\hat{m}_0}) - 1\}^{1/2}$.

4 实例计算

某型号电容器随机抽取 20 只做温度步加应力寿命试验,得各温度水平下的数据(d)为

$s_1 = 358$ K:	59, 79, 402, 490	$T_1^* = 500$	$r_1 = 4$,
$s_2 = 398$ K:	18, 22, 47, 186	$T_2^* = 200$	$r_2 = 4$,
$s_3 = 423$ K:	11, 13, 87, 96	$T_3^* = 100$	$r_3 = 4$,
$s_4 = 448$ K:	6, 9, 30, 52	$T_4^* = 60$	$r_4 = 4$.

试求在正常温度$s_0 = 323$ K下,产品寿命的分布函数及其可靠性特征值估计. 取$\varphi(s) = \frac{1}{ks}$,$k = 0.861\,7\times10^{-4}$,$\varphi(s_0) = 35,929\,0$,有

$\varphi(s_i)$: 32.416 2, 29.158 6, 27.435 3, 25.903 4,

$\hat{m}_i$: 0.986 5, 0.776 4, 0.870 2, 0.934 8,

$\hat{\eta}_i$: 2 305.84, 985.94, 280.03, 87.40,

$\ln\hat{\eta}_i$: 7.743 2, 6.893 6, 5.634 9, 4.470 5,

即 $r_{\eta\varphi} = 0.964\ 4$. 因此,$\ln\hat{\eta} = -8.032\ 4 + 0.494\ 9\varphi(s)$ 可靠,将$\varphi(s_0) = 35.929\,0$代入,求得$\hat{\eta}_0 = 17\ 134.72$,而$r_{\theta\varphi} = 0.983\ 5$;因此,$\ln\hat{\theta} = -9.583\ 1 + 0.525\ 7\varphi(s)$ 可靠,将$\varphi(s_0)$代入,得到$\ln\hat{\theta}_0 = 9.304\ 8$,$\hat{m}_0 = \ln\hat{\theta}_0/\ln\hat{\eta}_0 = 0.954\ 4$. $\hat{c}_0 = \{\Gamma(1+2/\hat{m}_0)/\Gamma^2(1+1/\hat{m}_0) - 1\}^{1/2} = 1.0427$,$F_0(t) = 1$

$-\exp\{-(\frac{t}{17\ 134.72})^{0.954\ 4}\}\ t\geq 0.$ 由此可求得产品和各种可靠性特征值.

5　结束语

(1) 计算结果检查　实例计算知形状参数并非与应力变化无关, $\hat{m}_1=1.27\hat{m}_2$, 若不计误差, 形状参数也可算是基本相等. 相关系数 $r_{\varphi\eta}=0.964\ 4$. 因此计算结果与假定无矛盾. (2) 计算结果参数 $\hat{m}_i$ 有差异, 目前无法判别这种差异是随机误差或是系统误差. (3) 若可断定 m 与应力变化无关, 则加上假定 $m_0=m_1=\cdots=m_k$. 此时假定 II 中的 $\ln\theta=a+b\varphi(s)$ 模型与 $\ln\eta=a_1+b_1\varphi(s)$ 模型实质上一样, 故可去掉式(1). 这恰好与许多文献的假定一致, 并可认为 $\hat{m}_i(i=\overline{1,k})$ 的差异是随机误差引起的. 因此, m_0 的估计值可用 $\overline{m}_0=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\hat{m}_i=0.897\ 9$, 无需应用图分析法或最佳线性无偏估计法. 可见, 应用最大似然估计法, 显然, 既简单精度又高. (4) 若无法解释 $\hat{m}_i(i=\overline{1,k})$ 的差异是随机误差, 那么形状参数 m 与应力变化无关的假定, 不是错误就是多余, 故应该说本文的方法是好的. (5) 因对 m_0 的估计方法不同, 会影响可靠性特征值的估计, 因此方法的选择是重要的. (6) 恒加应力寿命试验的统计分析可作为本文的特例, 只要在式(4), (5)中将 n 换成 n_i, R_i 换成 $r_i(i=\overline{1,k})$, 一切计算照旧.

参　考　文　献

1　戴树森, 费鹤良, 王玲玲等. 可靠性试验及其统计分析. 北京: 国防工业出版社, 1984. 449～578

2　唐德钧. Weibull 变异系数的区间估计. 应用概率统计, 1989, 3: 276～281

3　葛广平, 马海训. Weibull 分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析. 数理统计与应用概率, 1992, 7(2): 150～159

4　Mao Shisong, Han Qing. Statistical analysis of life and accelerated life test on Weibull distribution case under type I censring. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 1991, 7(1): 61～72

5　陈建伟. Gamma 部件参数 λ 和 k 的 Bayes 估计. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(4): 243～247

Statistical Analysis of Stepwisely Stress Accelerated Life Test for the Occasion of Weibull Distribution

Wu Shaomin　　Cheng Xiyu

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　For the occasion of Weibull distribution, a statistical analysis is made on stepwisely stress accelerated life test which gets rid of the assumption that the shape parameter keeps invariable under different stress level. An estimate is given to distribution parameter of life and variational coefficient under normal stress level.

Keywords　Weibull distribution, stepwise stress, accelerated life test