第20卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.20 No.1
1999年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan.1999

两个可补子空间和的可补性*

吴 祝 宁

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 指出Banach空间X的两个可补子空间之和未必再是X的可补子空间, 但当P和Q都是X上连续线性投影算子且PQ是严格奇异算子时, $PX+QX$是可补的. 进而推出有限个两两不可比的可补子空间之和是可补的.

关键词 Banach空间, 可补子空间, 投影算子, 严格奇异算子, 和, 完全不可比

分类号 O 177.2

1 定义和引理

下例说明, 即使是Hilbert空间, 其可补子空间之和也未必再是可补子空间. 例如, 设$X=l_2$, $M=\{(\zeta_n)\in l_2 \mid \zeta_{2k}=k\zeta_{2k-1}\}$, $N=\{(\zeta_n)\in l_2 \mid \zeta_{2k}=0\}$, 则$M$和$N$均为$X$的闭子空间, 从而$M$, N均在X中可补. 但是$M+N$在X中非闭[1], 所以$M+N$在X中不可补.

定义1[2] 设X是Banach空间, T是X上的线性有界算子, 称T是严格奇异算子, 如果对X的任意无限维子空间M, T在M上的限制$T|_M: M\longrightarrow TM$都不是同构映射.

定义2[3] 设X的Y都是无限维的Banach空间, 称X和Y是完全不可比的, 如果X的任一无限维子空间都不与Y的子空间同构.

定理1[4] Banach空间X的有限维子空间和有限余维子空间在X中可补.

引理1 若M是Banach空间X的一个可补子空间, N是X的有限维子空间, 则$M+N$在X中可补.

证明 当$\dim N=1$时, 设$N=\{ku\}$, $u\in X$. (1) 若$u\notin M$, 则$M+N=M$是X的可补子空间. (2) 若$u\in M$, 由于M可补, 所以存在X的闭子空间V, $X=M\oplus V$. 设$u=m+v$, $m\in M$, $v\in V$. 由于$M+\{ku\}=M+\{kv\}$且$\{kv\}$在V中可补, 所以存在V的子空间V_1, $V=\{kv\}+V_1$, $v\notin V_1$. 这时, $X=M\oplus V=(M+\{kv\})\oplus V_1$. 即$M+N$在$X$中可补. 当$\dim N>1$时, 由归纳法易证.

引理2 设M是Banach空间X的一个可补子空间, T是同构的线性有界算子, 则TM也在X中可补.

证明 因为M在X中可补, 所以存在连续线性投影算子P, 使得$PX=M$. 令$Q=TPT^{-1}$, 则Q是投影算子, 且$QX=(TPT^{-1})X=TM$. 故知TM也在X中可补. (1) 若$PX\subseteq \bar{P}X$, $QX\subseteq(I-\bar{P})X$, 则$PX+QX=P\bar{P}X+Q(I-\bar{P})X$. (2) $PQ=QP=0$, 则$P+Q$是连续线性

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

* 本文1998-07-18收到

投影算子,且$(P+Q)X=PX+QX$.

引理**3** 设$P,Q,\bar{P}$都是连续线性投影算子,(1)若$PX\subseteq\bar{P}X,QX\subseteq(I-\bar{P})X$,则$PX+QX=P\bar{P}X+Q(I-\bar{P})X$.(2)若$PQ=QP=0$,则$P+Q$是连续线性投影算子,且$(P+Q)X=PX+QX$.

证明 (1)显然成立.(2)对任意的$x\in X$,$(P+Q)^2x=P^2x+PQx+QPx+Q^2x=Px+Qx=(P+Q)x$.所以$P+Q$是投影算子.又对任意的$x\in PX+QX$,设$x=Px_1+Qx_2$,有$Px=P^2x_1+PQx_2=Px_1$,$Qx=QPx_1+Q^2x_2=Qx_2$,所以有$x=Px_1+Qx_2=Px+Qx=(P+Q)x\in(P+Q)X$,即$PX+QX\subseteq(P+Q)X$.显然有$(P+Q)X\subseteq PX+QX$.所以$PX+QX=(P+Q)X$.

引理**4** 设Y是X的闭子空间,且$\dim X/Y<\infty$则对任一闭子空间E,只要$E\cap Y=\{0\}$,$\dim E=\dim(X/Y)$,则$X=E\oplus Y$.

证明 设X的闭子空间E满足,$E\cap Y=\{0\}$,$\dim E=\dim(X/Y)$.由引理1知$Y+E$在X中可补.所以存在X的闭子空间Z,使得$X=(Y+E)\oplus Z=Y\oplus(E+Z)$.由于$\dim(E+Z)=\dim(X/Y)=\dim E<\infty$,所以$\dim Z=0$,即$Z=\{0\}$,$X=Y\oplus E$.

2 主要结果

定理**2** 如果P和Q都是X上的连续线性投影算子,且PQ是严格奇异算子,则$PX+QX$在X中可补.

证明 构造性证明,可分为几个步骤完成.(1)证明$PX\cap QX$是有限维子空间,从而由引理1,可设$PX\cap QX=\{0\}$.事实上,对任意的$x\in PX\cap QX$,存在$x_1,x_2\in X$,$x=Px_1=Qx_2$.因此,$x=P^2x_1=PQ^2x_2=PQx$,即PQ在$PX\cap QX$上的限制$PQ|_{(PX\cap QX)}$是同构映射.由于PQ是严格奇异算子,所以$PX\cap QX$是有限维的.(2)令$T=I-PQ$,则T是指标为零的Fredholm算子[5],所以$\dim(\ker T)<\infty$.显然有$\ker T\subseteq PX$,故有$\ker T\cap QX=\{0\}$.由引理1,$QX+\ker T$在X中可补,所以存在X的闭子空间S,使得$X=S\oplus(\ker T\oplus QX)=\ker T\oplus(S\oplus QX)$.从而存在连续线性投影算子$R$,$RX=\ker T$且$\ker R=QX\oplus S\supseteq QX$.(3)验证存在$X$的闭子空间$E$,满足$PX=E\oplus TPX$,$TX\cap E=\{0\}$,$E$和$\ker T$同构.对任意的$x\in PX$,设$x=Py$,$y\in X$,有$Tx=TPy=(I-PQ)Py=P(I-QP)y\in PX$.所以$PX$是$T$的不变子空间.更有$T$在$PX$中的限制$T|_{PX}$是$PX$上指标为零的Fredholm算子,所以存在$X$的有限维闭子空间$E$,满足$PX=TPX+E$,$TPX\cap E=\{0\}$.对任意的$x\in TX\cap E$,存在$y\in X$,$x=Ty\in E$.由于$PX=TPX\oplus E$,故对任意的$z\in X$,存在$x_1\in X$,满足$Ty+TPz=Px_1$,即$(I-PQ)y+P(I-QP)z=Px_1$,得$y=P(x_1-z+QPz+PQy)\in PX$.所以$x=Ty\in TPX\cap E$.故$TX\cap E=\{0\}$.又$\ker T\oplus TPX\subseteq PX=E\oplus TPX$.有$\dim E\geq\dim(\ker T)$而$E\cap TX=\{0\}$,$E\oplus TX\subseteq X=TX\oplus\ker T$,所以$\dim E\leq\dim(\ker T)$.综上,有$\dim E=\dim(\ker T)<\infty$,所以$E$和$\ker T$同构.且由引理4,$X=TX\oplus E$.(4)设$\varphi$是$\ker T$到$E$的一个同构映射,验证$U=\varphi R+T(I-R)=\varphi R+T$是同构映射.事实上,对任意的$x,y\in X$,若$U(x-y)=0$,由$U(x-y)=\varphi R(x-y)+T(x-y)\in E\oplus TX$知,$\varphi R(x-y)=0$且$T(x-y)=0$,所以$R(x-y)=0$且$x-y\in\ker T=RX$.从而,$x-y=R(x-y)=0$,即$x=y$.所以$U$是1-1的.又对任意的$x\in E$,$y=\varphi^{-1}x\in\ker T=RX$,所以有$x=\varphi Ry=(\varphi R+T)y=Uy\in UX$.即$UX\supseteq E$.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

对任意的 $x = Ty \in TX$，令 $z = y - Ry$，有 $Uz = U(y - Ry) = (\lambda R + T)(y - Ry) = T(I - R)y = Ty = x$，即 $x = Uz \in UX$. $UX \supseteq TX$. 从而，有 $UX \supseteq E + TX = X$. U 是到上的. 由逆算子定理，U^{-1} 是线性有界算子，故 U 是同构映射. (5) 证明 $UPX + UQX$ 可补，从而推出 $PX + QX$ 可补. 事实上，$UPX + UQX = UPU^{-1}X + UQU^{-1}X$，且 $UPU^{-1}X = (\lambda R + T)PU^{-1}X \subseteq \lambda RPU^{-1}X + P(I - QP)U^{-1}X \subseteq E + PX \subseteq PX$. $UQU^{-1}X = (\lambda R + T)QU^{-1}X \subseteq \lambda RQU^{-1}X + TQU^{-1}X = \{0\} + TQU^{-1}X = (I - P)QU^{-1}X \subseteq (I - P)X$. 由引理 3(1)，有 $UPU^{-1}X + UQU^{-1}X = UPU^{-1}PX + UQU^{-1}(I - P)X$，且因为 $(UPU^{-1}P)(UQU^{-1}(I - P))X \subseteq UPU^{-1}P(I - P)X = \{0\}$，$(UQU^{-1}(I - P))(UPU^{-1}P)X \subseteq UQU^{-1}(I - P)PX = \{0\}$. 由引理 3(2)，有 $UPU^{-1}P + UQU^{-1}(I - P)$ 是投影算子，且 $(UPU^{-1}P + UQU^{-1}(I - P))X = UPU^{-1}PX + UQU^{-1}(I - P)X = UPU^{-1}X + UQU^{-1}X = UPX + UQX$. 所以，$UPX + UQX$ 在 X 中可补. 由引理 2，$U^{-1}(UPX + UQX) = PX + QX$ 在 X 中可补.

推论 1 若 M 和 N 是 Banach 空间 X 的可补子空间，且 M, N 是完全不可比的，则 $M + N$ 在 X 中可补.

证明 设 P, Q 分别是 X 到 M, N 上的连续线性投影算子，则 PQ 是严格奇异算子. 否则，存在 X 的无限维子空间 Y，PQ 在 Y 上的限制 $PQ|_Y: Y \longrightarrow PQY$ 是同构映射. 此时，P 是 N 的子空间 QY 到 M 的子空间 PQY 上的同构映射，与 M, N 是完全不可比矛盾. 由定理 2，$M + N$ 在 X 中可补.

推论 2 若 $M_1, \cdots, M_n$ 是 X 上两两不可比的可补子空间，则 $M_1 + \cdots + M_n$ 在 X 上可补.

证明 当 $n = 2$ 时，即为推论 1，结论成立. 当 $n = k - 1$ 时，设结论成立. 由于 M_n 与 $M_1 + \cdots + M_{n-1}$ 是不可比的[5]，且 M_n 与 $M_1 + \cdots + M_{n-1}$ 均可补，故推论 1，$M_1 + \cdots + M_n$ 在 X 上可补.

参 考 文 献

1 吴祝宁. 关于两个闭子空间和的闭性. 福建师范大学学报(自然科学版)，1998，14(3)：18～21

2 Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach spaces I. New Youk: Springer Verlag, 1977. 75～84

3 Rosenthal H P. On totally incomparable Banach spaces. J. Funct. Anal., 1969, 4: 167～175

4 赵俊峰. Banach 空间结构理论. 武汉：武汉大学出版社，1991. 9～18

5 Dowson H R. Spectral theory of linear operators. London: Acaclemic Press, 1978. 67～94

The Complementarity of the Sum of Two Complemented Subspaces

Wu Zhuning

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract As pointed by the author, the sum of two complemented subspaces of Banach space X may not be complemented space of X; however, when P and Q are all continuous linear projection operators on X and PQ are strictly singular operators, $PX + QX$ are complemented. As further inferred by the author, the sum of pairwisely incomparable and complemented subspaces limited in number is complemented.

Keywords Banach space, complemented subspace, projection operator, strictly singular operator, sum, completely incomparable

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www