第20卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.20 No.1
1999年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan.1999

正概周期解的存在性和唯一性及稳定性*

王 全 义

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 研究一个具有无穷时滞的造血模型的正概周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题. 利用不动点方法, 我们得到了一些保证该方程的正概周期解的存在性、唯一性及稳定性的充分条件.

关键词 无穷时滞, 概周期解, 存在性, 唯一性, 稳定性
分类号 O 175.6

文 [1] 研究了一个具有无穷时滞的造血模型, 即

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -r(t)N(t) + \alpha(t)\int_0^{\infty} K(s)\exp(-\beta(t)N(t-s))\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

的正周期解的存在性、稳定性等问题 · 式(1)中, $t\in\mathbf{R}$, 且 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $r(t)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上严格正的有界周期函数, 它们具有共同的周期 ω; $K(t):\mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}^+$ 是分段连续滞后核, 最终非增并且满足

$$\int_0^{\infty} K(s)\,\mathrm{d}s = 1. \tag{2}$$

在文 [2, 3] 中, 我们研究了方程(1)的正 ω-周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题, 得到了一些保证方程(1)的正 ω-周期解的存在性、唯一性及稳定性的充分性条件, 所得结果推广了文 [1] 的有关结果. 本文将研究方程(1)的正概周期解的存在性、唯一性和稳定性等问题, 获得一些新结果, 并推广了文 [1, 3] 的有关结果.

1 一些引理

在本文中, 我们假设下列条件成立: $r(t)$, $\beta(t)$ 和 $\alpha(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上正的连续的概周期函数, $K(t)$ 仍如前面所述. 用 r_1, r_2 分别表示 $r(t)$ 的上确界及下确界; α_1, α_2 分别表示 $\alpha(t)$ 的上确界和下确界; β_1, β_2 分别表示 $\beta(t)$ 的上确界及下确界; 且 r_2, α_2, β_2 都大于零. 于是有

$$\exp(-r_1(t-s)) \le \exp\left(\int_s^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \le \exp(-r_2(t-s)), (t\ge s). \tag{3}$$

设方程(1)的解 $N(t)$ 满足下列初始条件:

$$\left.\begin{aligned} &N(s) = \varphi(s), \quad s\in(-\infty, t_0],\\ &\varphi(t_0) > 0, \qquad \varphi(s)\in\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 $\Phi=\{\varphi(s):\varphi(s)\in C((-\infty,t_0],\mathbf{R}^+), \ \|\varphi\| = \sup\{|\varphi(s)| : s\in(-\infty,t_0]\}\le M\}$, 这里 $M>0$

* 本文 1998-07-27 收到; 福建省自然科学基金资助项目

为常数.

由常数变易法可得，方程(1)满足初始条件(4)的解 $N(t)$ 可表示为

$$N(t)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau\right)N(t_0)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\int_{u}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\alpha(u)\cdot$$
$$\int_0^{\infty}K(s)\exp(-\beta(u)N(u-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}u,\ (t\geq t_0),\tag{5}$$

从而方程(1)满足初始条件(4)的解在 $t\geq t_0$ 上存在且是正解.

由于问题的实际意义，因此下面我们只研究方程(1)的正概周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题. 下面先证明一些有用的引理.

引理 1　设 $V(t)$ 是概周期函数，则

$$g(t)=\int_0^{\infty}K(s)\exp(-\beta(t)V(t-s))\mathrm{d}s\tag{6}$$

也是概周期函数.

证明　因为 $V(t)$ 是概周期函数，故有常数 $b>0$ 使得对 $t\in\mathbf{R}$ 有 $|V(t)|\leq b$. 因此有

$$g(t)\leq\int_0^{\infty}K(s)\exp(\beta_1 b)\mathrm{d}s\leq\exp(\beta_1 b),\ (t\in\mathbf{R}),\tag{7}$$

又 $g(t)>0$，故 $g(t)$ 存在且有界. 因为 $\beta(t)$，$V(t)$ 都是概周期函数，故 $\beta(t)$，$V(t)$ 一致连续，从而易知 $g(t)$ 也是一致连续的. 对任意的序列 $\tau_j\in\mathbf{R}$，$j=1,2,3,\cdots$，必存在着子序列 $\{t_k\}\subset\{\tau_j\}$，使得 $\{\beta(t+t_k)\}$ 及 $\{V(t+t_k)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛. 下面证明 $\{g(t+t_k)\}$ 也在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛.

因为 $\{\beta(t+t_j)\}$，$\{V(t+t_j)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛，因此对任意给定的 $\epsilon>0$，存在着自然数 K 充分大，使得当 $j,m>K$ 时，有

$$|\beta(t+t_j)-\beta(t+t_m)|<\frac{\epsilon}{3b\exp(\beta_1 b)},\ (t\in\mathbf{R}),\tag{8}$$

$$|V(t+t_j)-V(t+t_m)|<\frac{\epsilon}{3\beta_1\exp(\beta_1 b)},\ (t\in\mathbf{R}).\tag{9}$$

因为

$$g(t+t_j)=\int_0^{\infty}K(s)\exp(-\beta(t+t_j)V(t+t_j-s))\mathrm{d}s,\tag{10}$$

所以

$$\begin{aligned}|g(t+t_j)-g(t+t_m)|\leq&\int_0^{\infty}K(s)|\exp(-\beta(t+t_j)V(t+t_j-s))-\\&\exp(-\beta(t+t_m)V(t+t_m-s))|\mathrm{d}s\leq\\&\int_0^{\infty}K(s)\exp(-\gamma(t,t_j,t_m,s))\cdot\\&|\beta(t+t_j)V(t+t_j-s)-\beta(t+t_m)\cdot\\&V(t+t_m-s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{11}$$

在式(11)中，$\gamma(t,t_j,t_m,s)$ 在 $\beta(t+t_m)V(t+t_m-s)$ 与 $\beta(t+t_j)V(t+t_j-s)$ 之间，从而 $|-\gamma(t,t_j,t_m,s)|\leq\beta_1 b$. 于是，对任意的 $\epsilon>0$，当 $j,m>K$ 时，由式(8)～(11)得

$$|g(t+t_j)-g(t+t_m)|\leq\int_0^{\infty}K(s)\exp(\beta_1 b)|\beta(t+t_j)V(t+t_j-s)-$$

$$\beta(t+t_m)V(t+t_m-s)\big|\,\mathrm{d}s \le$$

$$\exp(\beta_1 b)\int_0^{\infty} K(s)\big[\,\big|\beta(t+t_j)-\beta(t+t_m)\big|\,\big|V(t+t_j-s)\big| +$$

$$\beta(t+t_m)\big|V(t+t_j-s)-V(t+t_m-s)\big|\,\big]\mathrm{d}s \le$$

$$\exp(\beta_1 b)\int_0^{\infty} K(s)\left[\frac{\epsilon\cdot b}{3b\exp(\beta_1 b)}+\frac{\epsilon\beta_1}{3\beta_1\exp(\beta_1 b)}\right]\mathrm{d}s <$$

$$\epsilon,\quad (t\in\mathbf{R}), \tag{12}$$

故$\{g(t+t_j)\}$在$\mathbf{R}$上一致收敛．因此，$g(t)$也是概周期函数．引理1证毕．

考虑如下的概周期微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-r(t)x+f(t), \tag{13}$$

其中$r(t)$如前面所述，$f(t)$也是概周期函数．由于$r(t)\ge r_2>0$，所以方程(13)具有唯一的概周期解$x(t)$满足

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp\Big(-\int_u^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)f(u)\,\mathrm{d}u,\ (t\in\mathbf{R}). \tag{14}$$

于是我们有

引理2 方程(13)具有唯一的概周期解$x(t)$满足式(14)．

3 正概周期解的存在性

定理1 如果$r_2>\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)$，则方程(1)存在着一个正概周期解$N_0(t)$满足

$$n_1\le N_0(t)\le n_2,\qquad (t\in\mathbf{R}), \tag{15}$$

其中$n_2=\dfrac{\alpha_1}{r_2}$，$n_1=\dfrac{\alpha_2\exp(-\beta_1 n_2)}{r_1}$．

证明　设$B=\{V(t)\,|\,V:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$是连续概周期函数$\}$，则$B$在范数$\|V\|=\sup\{|V(t)|:t\in\mathbf{R}\}$下是一个Banach空间．记

$$B_1=\{V\,|\,V\in B\text{ 且 }n_1\le V(t)\le n_2,t\in\mathbf{R}\},$$

其中$n_2=\dfrac{\alpha_1}{r_2}$，$n_1=\dfrac{\alpha_2\exp(-\beta_1 n_2)}{r_1}$．于是，$B_1$是$B$中的有界闭子集．

对任意的$V\in B_1$，由引理1可知

$$f(t)=\alpha(t)\int_0^{\infty}K(s)\exp(-\beta(t)V(t-s))\,\mathrm{d}s,\quad (t\in\mathbf{R}) \tag{16}$$

是概周期函数．考虑下列概周期微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-r(t)N(t)+f(t). \tag{17}$$

由引理2可知，方程(17)具有唯一的概周期解

$$N(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp\Big(-\int_u^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\alpha(u)\int_0^{+\infty}K(s)\exp(-\beta(u)V(u-s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u. \tag{18}$$

于是我们有

$$N(t)\le\int_{-\infty}^{t}\exp(-r_2(t-u))\alpha(u)\cdot$$

$$\int^{\infty} K(s)\exp(-\beta(u)V(u-s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u \le$$

$$\alpha_1\int_{-\infty}\exp(-r_2(t-u))\int^{\infty}K(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u \le \frac{\alpha_1}{r_2} = n_2. \tag{19}$$

从而又有

$$N(t) \ge \int_{-\infty}\exp(-r_1(t-u))\alpha(u)\int^{\infty}K(s)\exp(-\beta(u)V(u-s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u \ge$$

$$\alpha_2\exp(-\beta_1 n_2)\int_{-\infty}\exp(-r_1(t-u))\int^{\infty}K(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u \ge \frac{\alpha_2\exp(-\beta_1 n_2)}{r_1} = n_1. \tag{20}$$

即有 $n_1\le N(t)\le n_2$, $(t\in\mathbf{R})$, 所以 $N\in B_1$.

下面定义算子 $T: B_1\longrightarrow B_1$ 为

$$TV(t) = \int_{-\infty}\exp(-\int r(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\alpha(u)\cdot$$

$$\int^{\infty}K(s)\cdot\exp(-\beta(u)V(u-s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u, \qquad (\forall V\in B_1). \tag{21}$$

对任意的 $V_1, V_2\in B_1$, 由式(17)及中值定理得

$$\left|TV_1(t) - TV_2(t)\right| \le \int_{-\infty}\exp(-\int r(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\alpha(u)\int^{\infty}K(s)\left|\exp(-\beta(u)V_1(u-s)) -\right.$$

$$\left.\exp(-\beta(u)V_2(u-s))\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \le$$

$$\alpha_1\int_{-\infty}\exp(-r_2(t-u))\int^{\infty}K(s)\exp(-\beta(u)y(u-s))\cdot$$

$$\beta(u)\left|V_1(u-s) - V_2(u-s)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}u, \tag{22}$$

其中 $y(t)$ 在 $V_1(t)$ 与 $V_2(t)$ 之间, 因此有 $n_1\le y(t)\le n_2$, $(t\in\mathbf{R})$. 于是由式(22)得

$$\left|TV_1(t) - TV_2(t)\right| \le \alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)\,\|V_1 - V_2\|\int_{-\infty}\exp(-r_2(t-u))\cdot$$

$$\int^{\infty}K(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u \le \frac{1}{r_2}\cdot\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)\,\|V_1 - V_2\|. \tag{23}$$

从而有

$$\|TV_1 - TV_2\| \le \frac{1}{r_2}\cdot\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)\,\|V_1 - V_2\|. \tag{24}$$

因为 $\frac{1}{r_2}\cdot\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1) < 1$, 所以算子 $T: B_1\longrightarrow B_1$ 是压缩的. 从而 T 在 B_1 中具有唯一的不动点, 即有 $N_0\in B_1$ 使得 $TN_0(t) = N_0(t)$, 即

$$N_0(t) = \int_{-\infty}\exp(-\int r(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\alpha(u)\int^{\infty}K(s)\exp(-\beta(u)N_0(u-s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u. \tag{25}$$

由上式的右边可知 $N_0(t)$ 连续、可导, 并且直接微分上式的两边可知 $N_0(t)$ 满足方程(1). 定理 1 证毕.

4　正概周期解的唯一性及稳定性

首先由文[2]中的推论 1 可知, 若 $N(t)$ 是方程(1)满足初始条件(4)的任意正解, 则存在着 $t_1 > 0$ 充分大, 使得当 $t\ge t_1$ 时有

$$N_1 < N(t) < N_2, \tag{26}$$

其中$N_2 = \frac{\alpha_1}{r_2} + b$, $N_1 = \frac{1}{r_1} \cdot \alpha_2 b_1 \exp(-\beta_1 N_2)$, 这里$0 < b, b_1 < 1$为任意给定的常数, 且$b$可以充分小, b_1可以充分地接近于1. 由此并结合定理1可知方程(1)的正概周期解是唯一的.

其次, 由文[3]的推论2可知方程(1)的正概周期解$N_0(t)$是一致稳定的. 综上述得

定理2 若$r_2 > \alpha_1\beta_1 \exp(-\beta_2 n_1)$成立, 则方程(1)存在着唯一的、一致稳定的正概周期解$N_0(t)$满足式(15).

推论1 若$r_2 > \alpha_1\beta_1 \exp(-\beta_2 n_1)$成立且$r(t), \alpha(t), \beta(t)$为正的$\omega$-周期函数, 则方程(1)存在着唯一的、一致稳定的正ω-周期解$N_0(t)$满足式(15).

显然推论1改进了文[1]中的定理3.1及文[3]中的推论1的结果.

再由文[3]中的推论3, 我们有

定理3 如果下列条件: (i) $r_2 > \alpha_1\beta_1 \exp(-\beta_2 n_1)$和(ii) $\int^{\infty} sK(s)\,ds < +\infty$成立, 则方程(1)存在着唯一的、全局一致渐近稳定的正概周期解$N_0(t)$满足式(15).

参考文献

1 翁佩萱, 梁妙莲. 一个造血模型周期解的存在性及其性态. 应用数学, 1995, 8(4): 434～439

2 王全义. 一个造血模型的周期解的存在性及唯一性. 华侨大学学报(自然科学版), 1997, 18(1): 11～15

3 王全义. 一个造血模型的周期解的稳定性. 华侨大学学报(自然科学版), 1997, 18(3): 219～224

Existence and Uniqueness and Stability of Positive Almost Periodic Solution

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The paper deals with the positive almost periodic solution to a model of hemopoiesis with infinite time lag. By using fixed point mothed, some sufficient conditions are obtained for pledging existence and uniqueness and stability of positive almost periodic solution to this equation.

Keywords infinite time lag, almost periodic solution, existence, uniqueness, stability