第20卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.20 No.1
1999年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan.1999

GETOR迭代法的收敛性*

何 文 章

(黑龙江矿业学院基础部, 鸡西 158105)

摘要 定义了广义的ETOR(记为GETOR)迭代法, 给出GETOR方法的Stein-Rosenberg型定理, 并讨论当系数矩阵为正定对称矩阵时的收敛性.

关键词 线代数方程组, GETOR迭代法, 收敛性

分类号 O 175.9

考虑N阶线性方程组

$$\boldsymbol{A}x = b, \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{A}$是非奇异矩阵. $\boldsymbol{A}$可分裂为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} - \boldsymbol{F} - \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{F}', \tag{2}$$

其中$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A})$, $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}$及$-\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{F}'$分别为$\boldsymbol{A}$的下或上三角部分.

文[1]讨论了SOR迭代和AOR迭代, 文[2]提出解大线性系统的双参数松弛法(TOR方法), 文[3]进一步讨论了TOR方法的收敛性. 文[4]利用Evans的预处理技巧, 进一步定义了推广的双参松驰法(ETOR方法), 并讨论其收敛性. 但在ETOR方法中, 要求对角元是非0元素(或对角块是非奇异的). 而在实际应用时, 此条件并不一定满足. 为此我们更进一步定义了广义的ETOR方法(简称为GETOR方法), 给出GETOR方法的Stein-Rosenberg型定理, 并讨论当系数矩阵为正定对称矩阵时的收敛性.

1 广义的ETOR(GETOR)方法

设方程组(1)的系数矩阵$\boldsymbol{A}$是非奇异的, 且有式(2)型分裂, 其中$\boldsymbol{D}$是非奇异矩阵($\boldsymbol{D}$不必是对角(块)矩阵), $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{F}$是任意矩阵(他们不必是三角矩阵), 则定义广义的ETOR(GETOR)迭代法为

$$x^{(m+1)} = \boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau}x^{(m)} + \boldsymbol{k}, \tag{3}$$

其中GETOR迭代矩阵为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau} \equiv \\ &(\boldsymbol{D} - \alpha\boldsymbol{E} - \beta\boldsymbol{F})^{-1}\{(1-\tau)\boldsymbol{D} + (\tau-\alpha)\boldsymbol{E} + (\tau-\beta)\boldsymbol{F} + \tau\boldsymbol{E}' + \tau\boldsymbol{F}'\} = \\ &(\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{U} - \beta\boldsymbol{V})^{-1}\{(1-\tau)\boldsymbol{I} + (\tau-\alpha)\boldsymbol{U} + (\tau-\beta)\boldsymbol{V} + \tau\boldsymbol{U}' + \tau\boldsymbol{V}'\},\end{aligned} \tag{4}$$

* 本文1998-08-24收到

$$\left.\begin{aligned} &k \equiv (D - \alpha E - \beta F)^{-1}\tau b = \tau(I - \alpha U - \beta V)^{-1}D^{-1}b, \\ &U = D^{-1}E,\ V = D^{-1}F,\ U' = D^{-1}E',\ V' = D^{-1}F' \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

若在式(4),(5)中, 令 $\alpha = \frac{\alpha'}{2}, \beta = \frac{\beta'}{2}, \tau = \frac{\alpha' + \beta'}{2}$, 则它退化为广义的TOR方法, 其迭代矩阵为

$$\begin{aligned} &L_{\alpha',\beta',F} \equiv \\ &(2D - \alpha' E - \beta' F)^{-1}\{(2 - \alpha' - \beta')D + \\ &(\alpha' + \beta')(E' + F') + \alpha' F + \beta' E\}. \end{aligned} \tag{6}$$

特别地, 若取 $\alpha = \beta = 0, \tau = 1$ 则为广义Jacobi迭代, 其迭代矩阵为

$$B = D^{-1}(E + F + E' + F'); \tag{7}$$

若取 $\alpha = \beta = \tau = 1$, 则为广义的Gauss-Seidel迭代, 其迭代矩阵为

$$G = (D - E - F)^{-1}(E' + F'); \tag{8}$$

若取 $\alpha = \beta = \tau = \omega$, 则为广义的SOR迭代, 其迭代矩阵为

$$L_\omega = (I - \omega L)^{-1}\{(1 - \omega)I + \omega R\}, \tag{9}$$

其中 $L = U + V, R = U' + V'$; 若取 $\alpha = \beta = \omega, \tau = r$ 则为广义的AOR迭代, 其迭代矩阵为

$$L_{\omega,r} = (I - rL)^{-1}\{(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega R\} \tag{10}$$

等等, 不一一列举.

2　正定对称矩阵

定理1　设 $A = D - E - F - E' - F'$ 对称正定, $\tau > 0$, 则当 $(2 - \tau)D + (\tau - \alpha)(E + E') + (\tau - \beta)(F + F')$ 正定时, GETOR方法收敛.

证明　因 A 正定对称, 令 $\tau \neq 0$, 且令

$$\left.\begin{aligned} &M = \frac{1}{\tau}(D - \alpha E - \beta F), \text{则 } M \text{ 非奇异}, \\ &N = \frac{1}{\tau}\{(1 - \tau)D + (\tau - \alpha)E + (\tau - \beta)F + \tau E' + \tau F'\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

因此, $A = M - N$, $L_{\alpha,\beta,\tau} = M^{-1}N$, 且(1)与(3)完全相容. 由于这时 $L_{\alpha,\beta,\tau}$ 迭代收敛的一个充分条件为

$$\begin{aligned} &Q = M^T + N = \\ &\frac{1}{\tau}\{2 - \tau)D + (\tau - \alpha)(E + E') + (\tau - \beta)(F + F')\} \end{aligned} \tag{12}$$

是正定的[5], 这当且仅当

$$\begin{aligned} D^{-\frac{1}{2}}MD^{-\frac{1}{2}} = \frac{2 - \tau}{\tau}I + \frac{1}{\tau}\{(\tau - \alpha)D^{-\frac{1}{2}}(E + E')D^{-\frac{1}{2}} + \\ (\tau - \beta)D^{-\frac{1}{2}}(F + F')D^{-\frac{1}{2}}\} \end{aligned} \tag{13}$$

为正定的. 如果 $\mu_i (i = 1, 2\cdots, N)$ 为矩阵

$$\{(\tau - \alpha)D^{-\frac{1}{2}}(E + E')D^{-\frac{1}{2}} + (\tau - \beta)D^{-\frac{1}{2}}(F + F')D^{-\frac{1}{2}}\}$$

的特征值, 而式(13)左端矩阵正定的充要条件为

$$\frac{2 - \tau}{\tau} + \frac{1}{\tau}\mu_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, N), \tag{14}$$

但

$$D^{-\frac{1}{2}}\{(\tau-\alpha)(E+E')+(\tau-\beta)(F+F')\}D^{-\frac{1}{2}}\sim$$
$$D^{-1}\{(\tau-\alpha)(E+E')+(\tau-\beta)(F+F')\}, \tag{15}$$

从而它们有相同的特征值. 令 $\mu=\min\limits_{1\le i\le N}\mu_i$, 则当 $\tau>0$ 时, 只要 $2-\tau+\mu>0$, 则矩阵 Q 正定, 从而 ETOR 方法收敛. 证毕.

推论 1 设 $A=D-E-F-E'-F'$ 正定对称, $\mu_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为矩阵 $D^{-1}\{(\tau-\alpha)(E+E')+(\tau-\beta)(F+F')\}$ 的特征值, $\mu=\min\limits_{1\le i\le N}\mu_i$, 因此, 若

(i) $\mu\ge 0$ 时, 则当 $0<\tau<2$ 时, ETOR 方法收敛;

(ii) $\mu<0$ 时, 则当 $0<\tau<2+\mu$ 时, ETOR 方法收敛.

特别地, 当 $\alpha=\frac{\alpha'}{2}$, $\beta=\frac{\beta'}{2}$ 及 $\tau=\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ 时, 立得文[3]定理 1 及其推论以及文[2]中定理 2 的推论 1 及推论 2.

3 Stein-Rosenberg 型定理

引理 1[4] 设 E, F, E', F' 为非负矩阵, 令 $\lambda_{\alpha,\beta,\tau}=\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})$ 为 ETOR 迭代矩阵谱半径, 则当 $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$, $0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$ 时, 有

$$\frac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}+\tau-1}{\tau}=$$
$$\rho\{(\frac{\tau-\alpha}{\tau}+\frac{\alpha}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau})U+(\frac{\tau-\beta}{\tau}+\frac{\beta}{\tau}\tau_{\alpha,\beta,\tau})V+U'+V'\}, \tag{16}$$

其中 $U=D^{-1}E$, $V=D^{-1}F$, $U'=D^{-1}E'$, $V'=D^{-1}F'$.

由此, 易得如下的 Stein-Rosenberg 型定理[6]:

定理 2 设 E, F, E', F' 为非负矩阵, 且 $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$, $0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$, 若记 $B=U+V+U'+V'$, 则有

(i) $\rho(B)=0\Leftrightarrow\rho(L_\tau)=1-\tau\Leftrightarrow\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})=1-\tau$;

(ii) $\rho(B)=1\Leftrightarrow\rho(L_\tau)=1\Leftrightarrow\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})=1$;

(iii) $0<\rho(B)<1\Leftrightarrow 1-\tau<\rho(L_\tau)<1\Leftrightarrow 1-\tau<\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$, 且有估计式为

$$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\le 1-\tau(1-\rho(B));$$

(iv) $\rho(B)>1\Leftrightarrow\rho(L_\tau)>1\Leftrightarrow\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})>1$. 且有估计式为

$$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\ge 1-\tau+\tau\rho(B)\qquad(0<\tau<1),$$

其中

$$L_\tau=(I-\tau(U+V))^{-1}\{(1-\tau)I+\tau(U'+V')\}$$

为 SOR 迭代矩阵(参数为 τ).

证明 首先由式(16)可得

$$\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\ge 1-\tau, \text{即 } \rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\ge 1-\tau. \tag{17}$$

(i) 若 $\lambda_{\alpha,\beta,\tau}=1-\tau$, 则当 $0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$ 时, 由式(16)可知: 若记 $r_1=\min(\alpha,\tau-\alpha,\beta,\tau-\beta)$, 则有 $r_1\rho(B)=0$, 从而 $\rho(B)=0$.

(ii) 若 $\lambda_{\alpha,\beta,\tau}=1$, 则由式(16)立得 $\rho(B)=1$.

(iii) 若 $1-\tau<\lambda_{\alpha,\beta,\tau}<1$, 则 $0<\dfrac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}+\tau-1}{\tau}\leq\rho(\boldsymbol{B})$. 由此, 我们可得到 $\rho(\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau})\leq 1-\tau(1-\rho(\boldsymbol{B}))$. 又因 $1-\tau<\lambda_{\alpha,\beta,\tau}<1$, 若记 $r_2=\min\{\dfrac{\tau-\alpha}{\tau}+\dfrac{\alpha}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau},\dfrac{\tau-\beta}{\tau}+\dfrac{\beta}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\}$, 则 $0<r_2<1$, 且有 $\dfrac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}+\tau-1}{\tau}\geq r_2\rho(B)$, 所以 $\rho(B)\leq\dfrac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}+\tau-1}{\tau r_2}<1$.

(iv) 若 $\lambda_{\alpha,\beta,\tau}>1$, 则类似地有 $\rho(\boldsymbol{B})>1$ 及 $\lambda_{\alpha,\beta,\tau}+\tau-1\geq\tau\rho(\boldsymbol{B})$.

根据上述讨论, 利用反证法及文 [1] 的定理 2 便得本定理的结论.

定理 2　表明当 $\alpha\geq 0,\beta\geq 0,0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$ 时, 对 $\boldsymbol{L}$-矩阵而言, Jacobi 迭代、SOR 迭代($0<\omega=\tau<1$) 与 ETOR 迭代同时敛散. 这个结论比现有结果 [2~4] 更具普遍性.

参　考　文　献

1　Hadjidimos A. Accelerated overrelaxation method. Math. Comp., 1978, 32: 149～157

2　匡蛟勋. 关于解大线性系统的双参数松弛法. 上海师范学院学报(自然科学版), 1983, 4: 1～10

3　曾文平. 关于 TOR 方法的收敛性. 高等学校计算数学报, 1986, 8(1): 65～71

4　曾文平. 关于解大线性系统的推广的双参数松弛法的收敛性. 华侨大学学报(自然科学版) 1986, 7(4): 371～380

5　瓦格 R S 著. 矩阵迭代分析. 蒋尔雄等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1966. 52～88

6　Young D M. Iterative solution of large linear systems. New York: Academie Press, 1971. 153～376

7　陈培贤. AOR 方法的收敛性. 计算数学, 1983, 5(1): 66～71

Convergence of the GETOR Iteration Method

He Wenzhang

(Dept. of Basic Courses, Heilongjiang Inst. of Mining Eng., 158105, Jixi)

Abstract　The generalized ETOR, to be noted as GETOR, iteration method is defined; the GETOR method in Stein-Rosenberg type theorem is given; and its convergence is discussed under the condition that matrix of coefficients is positive definite and symmetric matrix.

Keywords　linear algebraic equations, GETOR iteration method, convergence