第20卷　第1期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.20　No.1
1999年1月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan.1999

分段与整体拟对称函数之间的关系*

黄　心　中

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要　探索分段拟对称函数与整体拟对称函数之间的关系．对整段区间上实值严格增加连续函数在分段拟对称的条件下,何时为整体拟对称函数作出研究,并估计其拟对称偏差的上限．改进了最近由 Heinonen 和 Hinkkanen 所得的两个相应结果．

关键词　拟共形映照,拟对称函数,维数,紧致多面体

分类号　O 174.55

设 X, Y 是两个度量空间, $a-b$ 表示空间中两点间的距离, $f: X\to Y$ 是同胚映照,若存在常数 $H<\infty$,对一切 $x\in X$ 有

$$\lim_{r\to 0}\sup\frac{\sup\{\ f(x)-f(y)\quad x-y\ \leq r\}}{\inf\{\ f(x)-f(y)\quad x-y\ \geq r\ \}}\leq H \tag{1}$$

成立,称 f 是 X 到 Y 上的拟共形映照．若存在一个从 $[0,\infty)$ 到自身上的同胚映照 η,满足

$$x-a\ \leq t\ x-b\Rightarrow f(x)-f(a)\ \leq\eta(t)\ f(x)-f(b)\ , \tag{2}$$

对一切 $t\geq 0$ 和任何三点组 $x, a, b\in X$ 成立,称 f 是 X 到 Y 上的拟对称映照.研究拟共形映照与拟对称映照之间的关系,吸引着不少人的兴趣,是目前受关注的重要课题之一.特别是研究分段拟对称函数与整体拟对称函数之间的关系,已有较大的进展,受到同行专家的关注.最近, Heinonen 和 Hinkkanen 在文〔〕中对分段拟对称函数与整体拟对称函数之间的关系作了研究,取得不少重要成果．本文对文〔〕中的两个定理作了深一步的研究,改进了 Heinonen 和 Hinkkanen 的相应成果．

1　一些主要的结果

Heinonen 和 Koskela 证明了下列定理A．

定理 **A**　若两个紧致多面体中每点都有一个维数 $d>1$ 的锥形邻域,且具有连通的连结,则它们之间的拟共形映照是拟对称映照．

定理A 在文〔〕的定理1.4 中曾有叙述．最近, Heinonen 和 Hinkkanen〔〕指出,维数 $d>1$ 的限制是必要的,且也不必有其它的限制．他们证明了下列定理 B.

定理 **B**　每点的维数都大于1的两个紧致多面体之间的拟共形映照是拟对称映照．

为了证明定理 B,除了应用定理 A 的结果外, Heinonen 和 Hinkkanen 研究了一维分段拟对称函数与整体拟对称函数之间的联系,证明了下面两个起着决定性作用的定理．

*　本文1998-08-24收到;福建省自然科学基金资助项目

定理C 设 $M\geq 1$, f 是 $[-1,M]$ 上的实值严格增加连续函数, $f(0)=0$; 设 f 是 $[-1,0]$ 和 $[0,M]$ 上的 K-拟对称函数, 且对 $0<t<1$, 有 $K_1^{-1}\leq\frac{f(t)}{f(-t)}\leq K_1$, 则 f 是 $[-1,M]$ 上的 K_2-拟对称函数. 这里, K_2 仅与 K 和 K_1 有关, 且 $K_2\leq(1+K_1)(1+K)^3$.

定理D 设 $M\geq 1$, f 是 $[-1,M]$ 上的实值严格增加连续函数, $f(0)=0$. 设 f 是 $[-1,0]$ 和 $[0,M]$ 上的 K-拟对称函数, 且对 $0<t\leq A<1$, 有 $K_1^{-1}\leq\frac{f(t)}{f(-t)}\leq K_1$, 则对 $0<t<1$, 有 $K_2^{-1}\leq\frac{f(t)}{f(-t)}\leq K_2$. 这里, K_2 仅与 K_1, K, A 有关, 且 $K_2<K_1K^{1+\ln(1/A)/\ln 2}$, 因而 f 是 $[-1,M]$ 上的 K_3-拟对称函数, K_3 是仅与 K, K_1, A 有关的常数.

上述两个定理指出了一维分段拟对称函数与整体拟对称函数之间的关系, 且有文[1]中例子说明存在分段拟对称函数但不是整体拟对称函数. 这显示出研究两者之间的关系是有意义的. 本文主要改进上述定理C与定理D的结果, 且指出并弥补了定理C证明中的缺陷.

Tukia和Väisälä[2]证明了在许多空间中, 拟对称映照的定义(2)中仅需检验 $t=1$ 时的情形, 其余的情况可用归纳证之. 这种情形也被称为是弱对称的. 注意到当考虑一维拟对称的情形, 事实上就是弱对称的情形, 因而本文中的术语与通常采用的术语的定义是一致的. 回顾到在一维的情况下, 若 f 是实轴 R 到自身上的严格增加连续函数, 满足

$$K^{-1}\leq\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\leq K, \tag{3}$$

对一切 $x\in\mathbf{R}$, $t>0$ 成立, 则 f 是 $\mathbf{R}$ 上的 K-拟对称函数. Beurling 和 Ahlfors[3]证明了实轴 $\mathbf{R}$ 上的 K-拟对称函数正好是上半平面 $H=\{z\ \ \mathrm{Im}\, z>0\}$ 到自身上保持无穷远点不动的拟共形映照的边界值, 这也引起了对 K-拟对称函数性质本身的不少研究[4~6].

2 主要结论及其证明

我们将阐述本文的主要结论及其证明, 现先证明如下的

定理1 设 $M\geq 1$, f 是 $[-1,M]$ 上的实值严格增加连续函数, $f(0)=0$. 设 f 是 $[-1,0]$ 和 $[0,M]$ 上的 K-拟对称函数, 且对于 $0<t<1$, 有 $K_1^{-1}\leq\frac{f(t)}{f(-t)}\leq K_1$, 则 f 是 $[-1,M]$ 上的 K_2-拟对称函数. K_2 是仅依赖于 K 和 K_1 的常数, 且 $K_2\leq(1+K_1)(1+K)^2$.

证明 对于 x,t 满足 $-1\leq x-t<x+t\leq M$, 我们要证明成立着

$$K_2^{-1}\leq f(x,t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\leq K_2. \tag{4}$$

若 $(x+t)\leq 0$ 或 $(x-t)\geq 0$, 依假设有 $K^{-1}\leq f(x,t)\leq K$, 式(4)成立, 因而可设 $(x-t)<0<(x+t)$. 我们可假设 $x\geq 0$. 由于 $-1\leq(x-t)<0$, 有 $0\leq x<t\leq(x+1)$, 这样 $f(x,t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)+f(x-t)}$. 我们先证明下列不等式

$$(1+K)^{-1}f(t)\leq f(x+t)-f(x)\leq(1+K)f(t). \tag{5}$$

因为 $\frac{f(t)}{K+1}\leq\frac{f(x+t)}{K+1}\leq f(x+t)-f(x)$, 第1个不等式由严格增加性可得, 第2个不等式等价于

$$(K+1)f(x)\leq Kf(x+t), \tag{6}$$

这又等价于

$$\frac{K+1}{K}f(x) \le \frac{1}{K}(f(x)-f(0)) + f(x) - f(0) \le f(2x) \le f(x+t). \tag{7}$$

注意到 $x+t \le M$, 故 $2x \le (x+t) \le M$, 从而式(7)成立. 另一方面, 由 $f(x)$ 在 $[0, M]$ 上的 K-拟对称性, 有

$$\left[f\left(\frac{x+t}{2}+\frac{x+t}{2}\right) - f\left(\frac{x+t}{2}\right)\right] / \left[f\left(\frac{x+t}{2}\right) - f(0)\right] \le K. \tag{8}$$

因此, $f(x+t) \le (1+K)f\left(\frac{x+t}{2}\right) \le (1+K)f(t)$, 从而

$$f(x+t) - f(x) \le f(x+t) \le (1+K)f(t),$$

故式(5)成立. 这样, 我们可得

$$\frac{1}{1+K}\frac{f(t)}{f(x)+f(x-t)} \le f(x,t) \le (1+K)\frac{f(t)}{f(x)+f(x-t)}. \tag{9}$$

当 $t \le 1$ 时, 由假设有

$$\frac{f(t)}{f(x)+f(x-t)} \ge \frac{f(t)}{f(t)+f(-t)} \ge \frac{1}{1+K_1}. \tag{10}$$

当 $t > 1$ 时, 注意到 $-1 \le (x-t)$, 有 $(t-x) \le 1$, 故

$$\frac{f(t)}{f(x)+f(x-t)} \ge \frac{1}{\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(x-t)}{f(t-x)}\frac{f(t-x)}{f(t)}} \ge \frac{1}{1+K_1}. \tag{11}$$

我们再来寻找 $f(x,t)$ 的一个上界. 当 $x \ge \frac{t}{2}$ 时, 由 $x < t$ 推出 $2x < (x+t)$, 有

$$f(t) \le f(2x) \le (1+K)f(x). \tag{12}$$

再由式(9)和式(12)可得 $f(x,t) \le (1+K)^2$. 当 $x < \frac{t}{2}$ 时, $-1 \le (x-t) < -\frac{t}{2}$; 当 $2(t-x) \le 1$ 时, 可推出 $t < 1$. 因此

$$f(-t) \le f(2(x-t)) = f(2(x-t)) - f(x-t) + f(x-t),$$

由此可得 $f(-t) \le (1+K) f(x-t)$, 从而

$$f(x,t) \le (1+K)\frac{f(t)}{f(x)+f(x-t)} \le$$

$$(1+K)\frac{f(t)}{f(-t)}\frac{f(-t)}{f(x-t)} \le K_1(1+K)^2.$$

当 $2(t-x) > 1$ 时, 由 $-1 \le (x-t) < -\frac{t}{2} < 0$, 推得 $t < 2$, 有

$$f(x,t) \le (1+K)\frac{f(t)}{f(x-t)} \le (1+K)\left(f(t) / f\left(-\frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$\left((1+K)\left(f\left(\frac{t}{2}\right) / f\left(-\frac{t}{2}\right)\right)\left(f(t)/f\left(\frac{t}{2}\right)\right) \le K_1(1+K)^2.$$

综合上述, 可得

$$(1+K_1)^{-1}(1+K)^{-1} \le f(x,t) \le (1+K)^2 K_1.$$

因此, f 是 $[-1, M]$ 上的 K_2-拟对称函数, K_2 是仅与 K, K_1 有关的常数, 且 $K_2 \le (1+K_1)(1+K)^2$. 定理 1 证毕.

附注　Heinonen 和 Hinkkanen 在证明定理 C 时, 利用了

$$f(x+t)-f(x)\le f(2t)\le f(t)+K(f(t)-f(0)).$$

但是,我们发现 $2t$ 未必落在$[0,M]$上,故其证明是有缺陷的.我们补充证明了公式(8),克服了这个缺陷,并且从定理1的证明中可见,定理1中所估计的拟对称偏差要比定理C中所得到的偏差小.

定理2 设 $M\ge 1$,f 是$[-1,M]$上的严格增加连续函数,$f(0)=0$;设 f 是$[-1,0]$和$[0,M]$上的 K-拟对称函数,且对于 $0<t\le A<1$,有 $K_1^{-1}\le\dfrac{f(t)}{f(-t)}\le K_1$,则当 $0<t<1$ 时,成立着 $K_2^{-1}\le\dfrac{f(t)}{f(-t)}\le K_2$,$K_2$ 是仅依赖于 K,K_1 和 A 的常数,且

$$K_2\le\begin{cases}K_1K^{1+\ln(1/A)/\ln 2}, & 0<A\le\dfrac{1}{2},\\[2mm] K_1K, & \dfrac{1}{2}<A<1.\end{cases}\tag{13}$$

因此,f 是$[-1,M]$上的 K_3-拟对称函数,K_3 是仅依赖于 K,K_1 和 A 的常数.

证明 当 $0<A\le\dfrac{1}{2}$ 时,取正整数 m,使 $2^{m-1}\le\dfrac{1}{A}<2^m$. 对任何 $t\in(0,1)$,令 $t_0=\dfrac{t}{2^m}<A$. 由于 f 是$[-1,0]$和$[0,M]$上的 K-拟对称函数,$f(0)=0$. 我们有

$$\frac{1}{K}\le\frac{f(2^kt_0)-f(2^{k-1}t_0)}{f(2^{k-1}t_0)-f(0)}\le K,\quad 1\le k\le m\tag{14}$$

从而得到

$$\left(\frac{1}{K}+1\right)^m f(t_0)\le f(2^mt_0)=f(t)\le(1+K)^m f(t_0).\tag{15}$$

注意到 f 是$[-1,M]$上的严格增加连续函数,同样可得

$$\left(\frac{1}{K}+1\right)^m(-f(-t_0))\le -f(-2^mt_0)=-f(-t_0)\le$$
$$(1+K)^m(-f(-t_0)).\tag{16}$$

由假设,可得

$$K^{-m}K_1^{-1}\le K^{-m}\frac{f(t_0)}{f(-t_0)}\le\frac{f(t)}{f(-t_0)}=\frac{f(2^mt_0)}{f(-2^mt_0)}\le$$
$$K^m\frac{f(t_0)}{f(-t_0)}\le K^mK_1,\tag{17}$$

因为 $m\le 1+\dfrac{\ln(1/A)}{\ln 2}$,故我们证明了当 $0<A\le\dfrac{1}{2}$ 时,$K_2^{-1}\le\dfrac{f(t)}{f(-t)}\le K_2$,$0<t<1$,其中 $K_2\le K_1K^{1+\frac{\ln(1/A)}{\ln 2}}$.

当 $\dfrac{1}{2}<A<1$ 时,有 $1<\dfrac{1}{A}<2$,对于任何 $t\in(0,1)$,取 $t_0=\dfrac{t}{2}<A$. 类似地,我们可得

$$\left(\frac{1}{K}+1\right)f(t_0)\le f(2t_0)\le(1+K)f(t_0),\tag{18}$$

$$\left(\frac{1}{K}+1\right)(-f(-t_0))\le -f(-2t_0)\le(1+K)(-f(-t_0)),\tag{19}$$

从而

$$K^{-1}K_1^{-1}\le K^{-1}\frac{f(t_0)}{f(-t_0)}\le\frac{f(t)}{f(-t)}=\frac{f(2t_0)}{f(-2t_0)}\le K\frac{f(t_0)}{f(-t_0)}\le KK_1.\tag{20}$$

定理 2 中的式(13)证毕．最后根据定理 1, 可知 f 是$[-1, M]$上的 K_3-拟对称函数, K_3 是仅依赖于 K, K_1 和 A 的常数．这就证明了定理 2.

顺便指出, Heinonen 和 Hinkkanen 在文 [1] 中拓宽了定理 D 的结果, 他们证明了下列的定理．

定理**E**　设 $M\geq 1$, f 是$[-1, M]$上的实值严格增加连续函数, $f(0)=0$. 设 f 是$[-1, 0]$和$[0, M]$上的 K-拟对称函数, 且存在序列$\{t_n\}$, $1<\dfrac{t_n}{t_{n+1}}\leq L$, $n\geq 0$ 和 $0<A=t_0<1$ 满足 $K_1^{-1}\leq \dfrac{f(t_n)}{f(-t_n)}\leq K$, 对 $n\geq 0$ 成立．则当 $0<t\leq A$ 时, 有 $K_2^{-1}\leq \dfrac{f(t)}{f(-t)}\leq K_2$, 这里 K_2 是仅依赖于 K, L, K_1 的常数．因此 f 是$[-1, M]$上的 K_3-拟对称函数, K_3 仅依赖于 K, A, L 和 K_1.

我们指出, 定理 E 的条件中对单调减少序列$\{t_n\}$的要求中, 还应有$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$ 的假设, 否则是不成立的．

参　考　文　献

1　Heinonen J, Hinkkanen A. Quasiconformal maps between compact polyhedra are quasisymmetric. Indiana University Math. J., 1996, 45: 997～1019

2　Tukia P, Väisälä J. Quaaisymmetric embeddings of metric spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math., 1980, 5: 97～114

3　Beurling A, Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math., 1956, 96: 125～142

4　Hinkkanen A. Asymptotic extremal growth of quasisymmetric functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math., 1986, 11: 295～320

5　Väisälä J. Quasimöbius maps. J. Analyse Math., 1984～1985, 44: 218～234

6　Rourke C P, Sanderson B J. Introduction to piece-wise Linear Topology. New York: Springer-Verlag, 1982. 1～200

Relation between Piecewise and Global Quasi-Symmetric Functions

Huang Xinzhong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A study is made on the relation between piecewise quasi-symmetric function and golobal one. For a real-valued strictly increasing function on an interval with piecewise quasi-symmetric property, the condition that will guarantee the function to be golobal quasi-symmetric is studied, and the quasi-symmetric distortion bound is estimated. As a result, two corresponding results of Heinonen and Hinkkanen are improved.

Keywords　quasi-conformal mapping, quasi-symmetric function, dimensionality, compact polyhedron