第19卷　第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.19　No.4
1998年10月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct.1998

Burger´s 方程的逆风型组显格式*

曾　文　平

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要　以求解Burger´s方程的显式逆风格式为基础,构造一个逆风型分组显式格式,并讨论其线性化的稳定性.数值结果表明,本方法优于Evans的分组显式格式.

关键词　Burger´s方程,分组显式格式,稳定性,显式逆风格式
分类号　O 241.82

本文考虑非线性Burger's方程的混合问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && 0\le x\le 1, t>0,\\ &u(x,0)=\varphi(x), && 0<x<1,\\ &u(0,t)=g_1(t), u(1,t)=g_2(t) && t>0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

该问题可作为Navier-stokes方程的简化形式.因此,问题(1)的求解方法的研究具有实用意义.文[1,2]采用分组显式格式求解问题(1).由于该方法是显式求解且无稳定性条件限制,因此易于在并行机和向量机上使用.该方法已受到充分重视.对于ϵ为1,0.1这样不太小的数,文[1]的结果是好的.但当ϵ取小时(如$\epsilon=0.01$等),计算结果失真较大.而文[2]格式对于大Reynods数问题明显优于文[1]的方法.本文将从求解Burgers方程的显式逆风格式出发,构造一组扩散项具Саульев型的新的分组显式格式.讨论了方法的线性化稳定性.数值结果表明,本文方法明显优于Evans的分组显式格式,而与文[2]的分组显式格式相当.

1　分组显式(GE)方法

求解Burger´s方程(1)的显式逆风格式为[3]

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon(1+R_j^n)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2},\tag{2}$$

其中$R_j^n=\left|u_j^n\right|h/2\epsilon$.由此给出相应的两个线性化半隐格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{2h}=\epsilon(1+R_j^n)\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}-u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}\tag{3}$$

及

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=\epsilon(1+R_j^n)\frac{u_{j+1}^n-u_j^n-u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}.\tag{4}$$

*　本文1998-03-22收到;福建省自然科学基金资助项目

令 $\upsilon_j^n=\epsilon(1+R_j^n)$, $\alpha_1=\upsilon_j^n-\frac{h}{2}u_j^n$, $\alpha_2=\upsilon_j^n+\frac{1}{2}u_j^n$, $r=\tau/h^2$. 则格式(3),(4)可改写为

$$(1+r\upsilon_j^n)u_j^{n+1}-r\alpha_1u_{j+1}^{n+1}=r\alpha_2u_{j-1}^n+(1-r\upsilon_j^n)u_j^n, \tag{5}$$

$$-r\alpha_2u_{j-1}^{n+1}+(1+r\upsilon_j^n)u_j^{n+1}=(1-r\upsilon_j^n)u_j^n+r\alpha_1u_{j+1}^n. \tag{6}$$

考虑二个网格点(x_j,t_{n+1}),(x_{j+1},t_{n+1})组成的一组点,在点(x_j,t_{n+1})上采用格式(5),而在点(x_{j+1},t_{n+1})上采用用格式(6),于是给出了一个 2×2 的方程组

$$\begin{bmatrix}1+r\upsilon_j^n & -r\alpha_1\\ -r\alpha_2 & 1+r\upsilon_j^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^{n+1}\\ u_{j+1}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-r\upsilon_j^n & 0\\ 0 & 1-r\upsilon_j^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^n\\ u_{j+1}^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r\alpha_2u_{j-1}^n\\ r\alpha_1u_{j+2}^n\end{bmatrix}. \tag{7}$$

由于 2 阶矩阵易求逆,于是立得

$$\begin{bmatrix}u_j^{n+1}\\ u_{j+1}^{n+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}1-r^2(\upsilon_j^n)^2 & r\alpha_1(1-r\upsilon_j^n)\\ r\alpha_2(1-r\upsilon_j^n) & 1-r^2(\upsilon_j^n)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^n\\ u_{j+1}^n\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}(1+r\upsilon_j^n)r\alpha_2u_{j-1}^n+r^2\alpha_1^2u_{j+2}^n\\ r^2\alpha_2^2u_{j-1}^n+(1+r\upsilon_j^n)r\alpha_1u_{j+2}^n\end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中 $\Delta=(1+r\upsilon_j^n)^2-r^2\alpha_1\alpha_2$. 对于不成组的内点,则单独给出,右不成组内点

$$u_{m-1}^{n+1}=\frac{1}{1+r\upsilon_{m-1}^n}\{r\alpha_1u_m^{n+1}+r\alpha_2u_{m-2}^n+(1-r\upsilon_{m-1}^n)u_{m-1}^n\}, \tag{9}$$

左不成组内点

$$u_1^{n+1}=\frac{1}{1+r\upsilon_1^n}\{r\alpha_2u_0^{n+1}+(1-r\upsilon_1^n)u_1^n+r\alpha_1u_2^n\}. \tag{10}$$

为形成分组显式(GE)格式,将区间[0,1]分为 m 等分,m 可为偶数或奇数,为节省篇幅起见,仅讨论 m 为偶数的情形. 此时有四种 GE 算法.

(1) GER 格式(靠右边界的内点为不成组点)对左起的$(m-2)$个内点用格式(8),对最后一个内点则用格式(9).

(2) GEL 格式(靠左边界的内点为不成组点)对左起的第一个内点用格式(10),其余$(m-2)$个内点依次分为$\frac{1}{2}(m-2)$组,用格式(8).

(3) (S)AGE 格式(单交替分组显式格式)在第$n+1$层用GEL 格式,在第$n+2$层用GER 格式.

(4) (D)AGE 格式(双交替分组显式格式)即按下列顺序 GEL→GER→GER→GEL 进行计算.

由 Taylor 级数展开易得各种算法的截断误差阶为 $O(\tau+h^2+\frac{\tau}{h})$,当 $\tau\to0$, $h\to0$ 且$\frac{\tau}{h}\to0$ 时是相容的. 但由于在 GEL, GER 算法中,截断误差中含有$\frac{\tau}{h}$的项在量值上相等而符号相反,因而互相抵消,故上述各种算法在实际计算中精度是高的.

2 线性化稳定性分析

令 $\upsilon=\epsilon(1+R)$, $R=\frac{|a|h}{2\epsilon}$, $\alpha_1=\upsilon-\frac{a}{2}h$, $\alpha_2=\upsilon+\frac{a}{2}h$, 因此有

(1) GEL 格式的矩阵形式为

$$(I + rG_2)\boldsymbol{u}^{n+1} = (I - rG_1)\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{b}_1^n, \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{u}^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_{m-1}^n)^{\mathrm{T}},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} \upsilon & -\alpha_1 & & & & \\ -\alpha_2 & \upsilon & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \upsilon & -\alpha_1 & \\ & & & -\alpha_2 & \upsilon & \\ & & & & & \upsilon \end{bmatrix}, \qquad G_2 = \begin{bmatrix} \upsilon & & & & & \\ & \upsilon & -\alpha_1 & & & \\ & -\alpha_2 & \upsilon & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \upsilon & -\alpha_1 \\ & & & & -\alpha_2 & \upsilon \end{bmatrix}.$$

(2) GER 格式的矩阵形式为

$$(I + rG_2)\boldsymbol{u}^{n+1} = (I - rG_1)\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{b}_2^n. \tag{12}$$

类似于文[2], 可得

定理 1　GEL(GER)格式的稳定性条件为

$$r \le \frac{1}{\max\left(\left|\upsilon - \frac{ah}{2}\right|, \left|\upsilon + \frac{ah}{2}\right|\right)}.$$

利用 Kellogg 引理[4], 可得

定理 2　(S)AGE 及(D)AGE 格式无条件(弱)稳定.

3　数值例子

考虑 Burger's 方程的初边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ &u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1.0 & (x \le 0), \\ 0 & (x > 0). \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

上式的解析解为

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x - \xi}{t}\right)\exp\left(\frac{-G}{2\epsilon}\right)\mathrm{d}\xi \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-G}{2\epsilon}\right)\mathrm{d}\xi, \tag{14}$$

其中 $G(\xi, x, t) = \int_0^{\xi}\varphi(\xi')\,\mathrm{d}\xi' + \frac{(x - \xi)^2}{2t}$.

为节省篇幅起见, 仅列出部分计算结果如表 1 所示. 数值结果表明本文结果明显优于文[1], 而与文[2]结果相当.

表 1　结果比较($\tau = 0.001, h = 0.01, t = 0.052$)

ϵ	x_j	解　析　解	文[1](D)AGE	文[2](D)AGE	本文(D)AGE
10^{-3}	-1.00	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
	-0.15	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
	-0.10	1.000 00	0.999 97	1.000 00	1.000 00
	-0.05	1.000 00	1.006 67	1.000 00	1.000 00

续表

ϵ	x_j	解析解	文[1](D)AGE	文[2](D)AGE	本文(D)AGE
10^{-3}	0.00	1.000 00	0.945 49	0.983 92	0.975 91
	0.05	0.000 00	0.000 24	0.001 25	0.000 41
10^{-4}	-0.15	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
	-0.10	1.000 00	0.999 45	1.000 00	1.000 00
	-0.05	1.000 00	1.015 87	1.000 00	1.000 00
	0.00	1.000 00	1.759 77	0.989 12	0.994 05
	0.10	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
10^{-5}	-0.15	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
	-0.10	1.000 00	0.999 37	1.000 00	1.000 00
	-0.05	1.000 00	1.015 67	1.000 00	1.000 00
	0.00	1.000 00	1.534 76	0.989 33	0.999 20
	0.05	0.000 00	0.000 00	0.000 01	0.000 00
	0.10	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00

参考文献

1 Evans D J, Abdullah A R B. The group explicit method for the solution of Burger's equation. Computing, 1984, 32: 239～259

2 王子丁, 陆金甫, 肖世江. Burgers 方程的一个分组显式格式. 计算物理, 1993, 10(4): 479～487

3 陆金甫. 对流扩散方程的一些单调性差分格式. 计算物理, 1991, 8(2): 157～164

4 康立山, 全惠云. 数值解高维偏微分方程. 上海: 上海科技出版社, 1990. 8～10

A Group Explicit Scheme of Upwind Type for Burger's Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Based on the explicit upwind scheme for solving Burger's equation, a grouping explicit scheme of upwind type is constructed. The linearized stability of the method is discussed. As shown by numerical results, the present method is more suitable than Evans method for solving Burger's equation.

Keywords Burger's equation, group explicit scheme, stability, explicit upwind scheme