第19卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.19 No.4
1998年10月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct.1998

# Weibull 分布场合恒加寿命试验统计分析*

程细玉 吴绍敏

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 对Weibull分布排除形状参数在不同应力水平下相等与应力变化无关的假设. 在恒定应力加速寿命试验下, 提出一种统计分析方法, 给出正常应力水平下寿命分布的参数估计, 并给出一个算例.

关键词 Weibull分布, 恒定应力, 加速寿命试验

分类号 O 213

## 1 问题的提出

问题1 加速寿命试验的统计分析, 一般作Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ假设[1].

Ⅰ. 产品在应力水平 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 的加速条件下, 其寿命分布类型与正常应力水平 $S_0$ 条件下的寿命分布类型相同. 即 $T_i \sim F(\frac{\mu_i - t}{\sigma_i}), i=\overline{0,k}$.

Ⅱ. $\sigma_0 = \sigma_1 = \cdots = \sigma_k$, 即形状参数与应力变化无关.

Ⅲ. 位置参数 $\mu$ 与所加应力 $S$, 有如下的关系:

$$\mu = a + b\varphi(S),$$

其中 $\varphi(S)$ 是应力 $S$ 的某已知函数.

假定Ⅰ是有道理的, 因为在加速寿命试验时, 选择的应力水平, 必须保持"失效机理不变", 而"失效机理不变"首先应反映在分布函数 $F(\frac{\mu_i - t}{\sigma_i})(i=\overline{0,k})$, 类型不变, 否则无法进行统计分析.

假定Ⅲ是由试验总结出来的统计模型, 是有根据的, 可以接受.

假定Ⅱ似乎没有根据, 它至少不能叫人信服. (1) 在应力水平 $S_i(i=\overline{0,k})$ 下, 产品的寿命 $T_i \sim F(\frac{\mu_i - t}{\sigma_i})$; 当 $T_i \neq T_j$, 那么就该有 $\mu_i \neq \mu_j, \sigma_i \neq \sigma_j$, 为什么 $\sigma$ 会与应力的变化无关呢? (2) 假定本身就不是真理, 它是科学工作者为获得某些结果的一种限制(或条件), 往往是可以排除或改变的, 限制越多结论的应用范围就越小. (3) "假定"不能决定试验数据的性质, 更不能作为检验"失效机理"是否变化的标准. (4) 如果Nelson的观点, (形状参数相等与"失效机理不变"是等价的) 是对的, 那么就不该用作假定. 应该作为统计分析结果的检验标准来使用. 根据上



* 本文1998-04-30收到; 福建省自然科学基金资助项目

述理由, 本文将排除假定Ⅱ.

问题 **2**　所有的书籍和文献, 都是应用图分析法与最佳线性无偏估计法来进行分析 . 这两种方法计算麻烦且要查许多数值表, 显然分析出来的结论误差较大且又难以推广应用, 对产品可靠性的评定工作不利 . 它远远不如采用最大的似然估计法简便 .

本文将去掉不合理的假定Ⅱ, 应用最大似然估计法, 在恒加应力试验下对 Weibull 分布进行统计分析, 方法简单且估计精度高 .

众所周知 Weibull 分布的应用极其广泛 .

## 2　引理与假定

引理 **1**　设 $T\sim F(t)=1-\exp\{-(t/\eta)^m\}$, $t\geq 0$. 则 $X=T^m$ 服从指数分布 $E(\lambda)$. 其中 $\lambda=\eta^{-m}$记 $\theta^*=\frac{1}{\lambda}=\eta^m$.

证明　$F_x(x)=P(x\leq x)=P(T^m\leq x)=P(T\leq x^{\frac{1}{m}})=F(x^{\frac{1}{m}})=1-\exp\{-(x/\eta^m)\}=1-\exp\{-\lambda x\}$. $x>0$.

引理 **2**　若 $T\sim W(m.\eta.t)$, 则 $T$ 的变异系数

$$C=\{\Gamma(1+\frac{2}{m})/\Gamma^2(1+\frac{1}{m})-1\}^{1/2}.$$

证明　知 $E(T)=\eta\Gamma(1+\frac{1}{m})$, $D(T)=\eta^2\{\Gamma(1+\frac{2}{m})-\Gamma^2(1+\frac{1}{m})\}$, 故

$$\delta=\sqrt{D(t)}/E(t)=\{\Gamma(1+\frac{2}{m})/\Gamma^2(1+\frac{1}{m})-1\}^{1/2}.$$

假定 **1**　在正常应力水平 $S_0$ 与加速应力水平 $S_1<S_i\cdots<S_k$ 下产品的寿命服从 $W(m_i,\eta_i t)$, 其分布函数为 $F_i(t)=1-\exp\{-(t/\eta_i)^{m_i}\}$ $(t\geq 0, i=\overline{0,k})$, 其中 $m_i>0$ 为形状参数, $\eta_i>0$ 为尺度参数 .

因指数分布 $X\sim E(\lambda)$, $\theta^*=\frac{1}{\lambda}$满足(如何伦尼斯方程) $\ln\theta^*=a+b\varphi(S)$, 其中 $\varphi(S)$ 是应力 $S$ 的某一已知函数, 所以由定理 1 可得假定 2.

假定 **2**　若 $T\sim W(m,\eta,t)$, 则

$$\ln\eta^m=a+b\varphi(S), \tag{1}$$

$$\ln\eta=a_1+b_1\varphi(S). \tag{2}$$

式(1), (2) 是两个统计模型 .

## 3　参数估计

### 3.1　在水平 $S_i$ 上参数 $m_i$ 与 $\eta_i$ 的最大似然估计

从一批产品中随机抽取 $n$ 个作恒加应力寿命试验 . 把 $n$ 个样品分成 $k$ 组, 每组 $n_i$ 个 $(i=\overline{1,k})$ $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$, $k$ 组样品分别在加速应力水平 $S_i$ 下 $(i=\overline{1,k})$ 作加速寿命试验 . 试验到 $T_i^*$, 有 $r_i$ 个失效其失效时间分别为 $t_{i1}\leq t_{i2}\leq\cdots t_{i\Gamma_i}$), 余下$(n_i-r_i)$ 个未失效 . 记

$$T_i=\sum_{j=1}^{\Gamma_i}t_{ij}+(n_i-r_i)T_i^*$$

为试验总时间，当定时截尾试验时 $T_i^*$ 为截尾时间；当定数截尾试验时 $T_i^* = t_{ir_i}$.

定理　$m_i, \eta_i$ 的最大似然估计由式(3)，(4) 方程组

$$\ln\hat{\eta}_i = \{\ln[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{m}_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{\hat{m}_i}] - \ln r_i\}/\hat{m}_i, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 1/\hat{m}_i = & -\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij}/r_i + [\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{m}_i}\ln t_{ij} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{\hat{m}_i}\ln T_i^*] \\ & \div [\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{m}_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{\hat{m}_i}] \end{aligned} \tag{4}$$

确定.

证明

$$\begin{aligned} L(r_i, T_i; m_i, \eta_i) = & (\eta_i^{-m_i r_i})\exp\{-\eta_i^{-m_i}\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\} m_i^{r_i} \\ & \times (\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij})^{m_i - 1}\frac{n_i}{(n_i - r_i)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln L = & -m_i r_i \ln\eta_i + r_i \ln m_i + (m_i - 1)\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} \\ & -\eta_i^{-m_i}[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}] + C. \end{aligned}$$

令 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \eta_i} = 0$，得

$$\eta_i^{m_i} = [\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}]/r_i \tag{5}$$

或

$$\ln\eta_i = \{\ln[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}] - \ln r_i\}/m_i. \tag{6}$$

令 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial m_i} = 0$，得

$$\begin{aligned} & -r_i\ln\eta_i + r_i/m_i + \sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} - \eta_i^{-m_i}\{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\ln T_i^*\} \\ & + [\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}]\eta_i^{-m_i}\ln\eta_i = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

将式(5)代入式(7)，得

$$\begin{aligned} 1/m_i = & -\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} + \{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i}\ln t_{ij} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\ln T_i^*\} \\ & \div \{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{m_i} + (n_i - r_i)(T_i^*)^{m_i}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

由式(6)和(8)知定理成立．应用时只要对式(4)进行迭代求出 $\hat{m}_i$，进而由式(3)求得 $\hat{\eta}_i$.

**3.2　$\eta_0$ 的估计**

由假定 2 知 $\ln\eta = a_1 + b_1\varphi(S)$，由数据组$(\ln\hat{\eta}_i, \varphi(S_i))$ $i = \overline{1, k}$ 按最小二乘法可确定:

$$\hat{a}_1 = \overline{\ln\eta} - \hat{b}_1\bar{\varphi},$$

$$\hat{b}_1 = [\sum_{i=1}^{k}\varphi(S_i)\ln\hat{\eta}_i - k\bar{\varphi}\,\overline{\ln\eta}] \div \sum_{i=1}^{k}[\varphi(S_i) - \bar{\varphi}]^2,$$

因此

$$\overline{\ln\eta}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln\hat{\eta}_i\ \bar{\varphi}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varphi(S_i).$$

$$\ln\hat{\eta}=\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(S).\text{则}\ \hat{\eta}_0=\exp\{\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(S_0)\}.$$

**3.3 $m_0$ 的估计**

记 $\hat{\theta}=\hat{\eta}_i^{\hat{m}_i}(i=\overline{1,k})$, 由假定2的 $\ln\eta^m=a+b\varphi(S)$. 应用数据组 $(\ln\hat{\theta}_i,\varphi(S_i))\ i=\overline{1,k}$, 按最小二乘法可确定

$$\hat{a}=\overline{\ln\theta}-\hat{b}\bar{\varphi},$$

$$\hat{b}=\Big[\sum_{i=1}^{k}\varphi(S_i)\ln\hat{\theta}_i-k\bar{\varphi}\overline{\ln\theta}\Big]\Big/\sum_{i=1}^{k}(\varphi(S_i)-\bar{\varphi})^2,$$

$$\overline{\ln\theta}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln\hat{\theta},$$

则得

$$\ln\hat{\theta}=\hat{a}+\hat{b}\varphi(S).\ \hat{\theta}_0=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(S_0)\}.\ \hat{m}_0=\frac{\hat{a}+\hat{b}\varphi(S_0)}{\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(S_0)}.$$

**3.4 变异系数 $\delta_0$ 的估计**

$$\hat{\delta}_0=\{\Gamma(1+2/\hat{m}_0)/\Gamma^2(1+\frac{1}{\hat{m}_0})-1\}^{\frac{1}{2}}.$$

# 4 实例计算

对某型号的电子元件进行温度加速应力寿命试验, 随机抽取28个样品, 分成四个组. 第一组10个, 第二组8个, 第三组6个, 第四组4个, 分别在温度(K)为360, 400, 480下进行失效试验, 获得时间数据(d)为

$S_1=360/\mathrm{K}$: 59, 79, 402, 490, $T_1^*=500$, $r_1=4$, $n_1=10$;

$S_2=400/\mathrm{K}$: 14, 22, 163, 210, $T_2^*=250$, $r_2=4$, $n_2=8$;

$S_3=440/\mathrm{K}$: 10, 30, 60, $T_3^*=100$, $r_3=3$, $n_3=6$;

$S_4=480/\mathrm{K}$: 5, 20, $T_4^*=80$, $r_4=2$, $n_4=4$.

取 $\varphi(S)=\frac{1}{k_0S}(k_0=0.861\ 7\times10^{-4})$, 试求在 $S_0=320$ K 下产品的寿命分布函数, 以及可靠性特征值估计.

应用定理, 将各加速应力水平上的数据代入式(3)与式(4)进行迭代, 得 $\hat{m}_1=1.033\ 4$, $\hat{m}_2=0.778\ 1$, $\hat{m}_3=0.914\ 3$, $\hat{m}_4=0.605\ 0$, $\hat{\eta}_1=982.10$, $\hat{\eta}_2=407.24$, $\hat{\eta}_3=140.03$, $\hat{\eta}_4=124.93$, 精度达0.000 1. 记 $\hat{\theta}_i=\hat{\eta}_i^{\hat{m}_i}$, 有

$\ln\hat{\theta}$: 7.119 8, 4.675 9, 4.518 3, 2.921 0;

$\ln\hat{\eta}$: 6.889 7, 6.009 4, 4.941 9, 4.827 8.

则 $\varphi_i=\varphi(S_i)$ 为32,236 0, 29.012 4, 26.374 9, 24.177 0; $r_{\varphi\theta}=0.960\ 0$. 因此, 方程 $\ln\hat{\theta}=-8.572\ 3+0.478\ 5\varphi(S)$ 可靠, 算得 $\ln\theta_0$ 的估计值 $\ln\hat{\theta}_0=8.780\ 7$. $r_{\varphi\eta}=0.977\ 0$. 方程 $\ln\hat{\eta}=-1.982\ 8+0.273\ 7\varphi(S)$ 可靠, 算得 $\eta_0$ 的估计值 $\hat{\eta}_0=2\ 816.002$, $\hat{m}_0=\frac{\ln\hat{\theta}_0}{\ln\hat{\eta}_0}=1.107\ 0$.

在正常应力水平 $S_0=320$ K 下, 产品寿命分布函数为 $F_0(t)=1-\exp\{-(t/2\ 816.002)^{1.107}\}$, $t\geq0$. 由此可得其它可靠性特征值, 变异系数 $\hat{\delta}_0=0.901\ 5$.

## 5 结束语

(1) 由实例计算知,形状参数 $m$ 并非与应力变化无关.

(2) 若认为形状参数 $m$ 与应力变化无关,则可加上假定 $m_0 = m_1 = \cdots = m_k$. 此时,假定Ⅱ中 $\ln\eta = a + b\varphi(S)$ 与 $\ln\eta = a_1 + b_1\varphi(S)$ 实质上是一致的,故可去掉节5(1),这恰好与许多文献的假定一致. 可认为 $\hat{m}_i(i = \overline{1,k})$ 的不同是随机误差引起的,故 $m_0$ 的估计值可取为 $\overline{m_0} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{m}_i = 0.8327$,就无须应用图分析法或最佳线性无偏估计法了. 应用最大似然估计法,既简单精度又高.

(3) 若无法判定 $m_i(i = \overline{1,k})$ 的差异是随机误差,那么形状参数 $m$ 与应力变化无关的假设,不是错误就是多余,而本文的方法就是合理的.

(4) 因对 $m_0$ 的估计方法不同,其结果差异较大,当然就会影响其它可靠性特征值的估计. 如用 $\overline{m_0} = 0.8327$,算得 $\overline{\delta_0} = 1.1851$;用 $\hat{m}_0 = 1.1070$,算得 $\hat{\delta}_0 = 0.9015$.

## 参 考 文 献

1 戴树森,费鹤良,王玲玲等.可靠性试验及统计分析.北京:国防工业出版社,1983.449～578

2 茆诗松,韩 青.Weibull分布定时截尾样本寿命试验与加速寿命试验的统计分析.应用概率统计,1991,7(1):61～72

3 仲崇新.Weibull分布场合下恒定应力加速寿命试验的Bayes方法.应用数学学报,1992,15(3):373～379

4 Nelson W. Accelerated life testing-step-stress model and data analysis. IEEE(R), 1980, 29(2):102～103

5 陈建伟.Gamma部件参数 $\lambda$ 和 $k$ 的Bayes估计.华侨大学学报(自然科学版),1994,15(4):243～247

# A Statistical Analysis of Constant Stress Accelerated Life Test for the Occasion of Weibull Distribution

Chen Xiyu Wu Shaomin

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** Getting rid of the assumption that the shape parameter keeps invariable under different stress level for the occasion of Weibull distribution, a method of statistical analysis is put forward under constant stress accelerated life test; a parametric estimate of life distribution is given under normal stress level, and a computing example is given as well.

**Keywords** Weibull distribution, constant stress, accelerated life test