第 19 卷　第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 19　No. 4
1998 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 1998

具无穷时滞的泛函微分方程的渐近稳定性*

王　全　义

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　研究一类具无穷时滞的泛函微分方程的零解的稳定性和渐近稳定性问题, 给出该类方程的零解的稳定性和渐近稳定性的一些新结果. 这些结果形式简单, 易于验证和应用.

关键词　无穷时滞, 泛函微分方程, 稳定性, 渐近稳定性

分类号　O 175.6

考虑下列泛函微分方程

$$\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \int_0^t C(t,s)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n$; $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ 是 $n \times n$ 阶函数矩阵, 它在 $[0, +\infty)$ 上连续; $C(t,s) = (C_{ij}(t,s))_{n\times n}$ 是一个 n 阶函数矩阵, 当 $0 \le s \le t < +\infty$ 时连续, 且 $\int_t^{\infty} \| C(u,t) \| \mathrm{d}u$ 在 $0 \le t \le +\infty$ 上连续. 关于方程(1) 的零解的稳定性及渐近稳定性问题, 已有不少文献研究过. 但是在现有的结果中, 总是要求 $\int_0^t \| C(t,s) \| \mathrm{d}s$ 或 $\int_t^{\infty} \| C(u,t) \| \mathrm{d}u$ 有界, 这就大大限制了其应用范围. 例如, 当 $n = 1$ 时, 文 [1] 的条件之一是

$$\int_0^t C(t,s)\ \mathrm{d}s + \int_t^{\infty} C(u,t)\ \mathrm{d}u \le M_1 < M_2 \le 2\ A(t)\ ,$$

其中 M_1, M_2 为正常数. 文 [2] 将上述条件改进为

$$\beta\int_t^{\infty} C(u,t)\ \mathrm{d}u \le M_1 < M_2 \le \alpha\ A(t)\ ,$$

这里 α, β 为正常数且 $\beta \ge \alpha$, 从而去掉了对 $\int_0^t C(t,s)\ \mathrm{d}s$ 有界性的限制. 本文也研究方程(1) 的零解的稳定性及渐近稳定性问题, 得到了一些零解的稳定性和渐近稳定性的新结果. 我们去掉了对 $\int_0^t \| C(t,s) \| \mathrm{d}s$ 和 $\int_t^{\infty} \| C(u,t) \| \mathrm{d}u$ 的有界性的限性, 大大扩展了 $C(t,s)$ 的允许范围. 本文的结果形式简单, 易于验证和应用, 且推广了文 [2] 的有关结果.

1　主要结果及其证明

我们用 $\| \cdot \|$ 表示向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 或矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的模, 且取

* 本文 1998-05-27 收到; 福建省自然科学基金资助项目

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \|A\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

如果 $\varphi:[0,t_0]\to R^n$ 是一个连续的初始函数,则我们用 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)$ 或 $\boldsymbol{x}(t)$(如果不会出现混淆的话)表示方程(1)在 $[t_0,+\infty)$ 上具有初始函数 φ 的解.

定义 1 方程(1)的零解被称为是稳定的,如果对于每一个 $\epsilon>0$ 和任何的 $t_0\ge 0$,存在着正数 $\delta=\delta(\epsilon,t_0)$,使得当 $\|\varphi(t)\|<\delta,(t\in[0,t_0])$ 时,就有 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)\|<\epsilon$ 对 $t\ge t_0$ 时成立.

定义 2 方程(1)的零解被称为是渐近稳定,如果对于每一个 $\epsilon>0$ 和任意的 $t_0\ge 0$,存在着正数 $\delta=\delta(\epsilon,t_0)$,使得当 $\|\varphi(t)\|<\delta,(t\in[0,t_0])$ 时,就有 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)\|<\epsilon$ 对 $t\ge t_0$ 时成立,且 $\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)\|=0$.

定理 1 对于方程(1),如果下列条件

$$a(t)+\int_{t}^{+\infty}\|C(u,t)\|\,\mathrm{d}u\le 0 \tag{2}$$

成立,其中 $a(t)=\max_{1\le j\le n}\{a_{jj}(t)+\sum_{i=1,i\ne j}^{n} a_{ij}(t)\}$,则方程(1)的零解是稳定的.

证 首先由方程(1)可得

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}x_i(t+0)x_i'(t)\le{}& a_{ii}(t)\ x_i(t)\ +\sum_{j=1,j\ne i}^{n} a_{ij}(t)\ \ x_j(t)\\ &+\int_0^t\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(t,s)\ \ x_j(s)\ \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3}$$

故有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}x_i(t+0)x_i'(t)\le{}&\sum_{i=1}^{n}\Big[a_{ii}(t)\ \ x_i(t)\ +\sum_{j=1,j\ne i}^{n} a_{ij}(t)\ \ x_j(t)\\ &+\int_0^t\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(t,s)\ \ x_j(s)\ \mathrm{d}s\Big]\\ \le{}& a(t)\ \|\boldsymbol{x}(t)\|+\int_0^t\|C(t,s)\|\ \|\boldsymbol{x}(s)\|\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4}$$

现在我们取李雅普诺夫泛函

$$V(t,\boldsymbol{x}(\cdot))=\|\boldsymbol{x}\|+\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\,\mathrm{d}u\ \ \|\boldsymbol{x}(s)\|\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

并计算 $V(t,\boldsymbol{x}(\cdot))$ 沿着方程(1)的解的右上导数,且由式(4)得

$$\begin{aligned}DV^{+}_{(1)}(t,\boldsymbol{x}(\cdot))={}&\sum_{i=1}^{n}x_i'(t)\operatorname{sgn}x_i(t+0)+\ \|\boldsymbol{x}(t)\|\int_t^{+\infty}\|C(u,t)\|\,\mathrm{d}u\\ &-\int_0^t\|C(t,s)\|\ \ \|\boldsymbol{x}(s)\|\,\mathrm{d}s\\ \le{}&\Big[a(t)+\int_t^{+\infty}\|C(u,t)\|\,\mathrm{d}u\Big]\ \|\boldsymbol{x}(t)\|\le 0.\end{aligned} \tag{6}$$

因为 $V(t,\boldsymbol{x}(\cdot))$ 正定且 $DV^{+}_{(1)}(t,\boldsymbol{x}(\cdot))\le 0$,所以方程(1)的零解是稳定的.

定理 2 对于方程(1),如果下列条件被满足:

(A) 存在着常数 $k_1>1$ 及 $k_2>0$,使得下式

$$a(t)+k_1\int_t^{+\infty}\|C(u,t)\|\,\mathrm{d}u\le -k_2 \tag{7}$$

成立,其中 $a(t)$ 如定理 1 中给出.

(B) 存在常数 $k_3 \geq 1$ 使得 $k_3 |a(t)| \geq \| A(t) \|$. 则方程(1)的零解是渐近稳定的.

证　首先由定理 1 知方程(1)的零解是稳定的. 以下证明 $\lim\limits_{t \to +\infty} \| \boldsymbol{x}(t) \| = 0$. 由方程(1)可得

$$|x_i'(t)| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \, |x_j(t)| + \sum_{j=1}^{n} \int^{t} |C_{ij}(t,s)| \, |x_j(s)| \, \mathrm{d}s,$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i'(t)| \leq \| A(t) \| \, \| \boldsymbol{x}(t) \| + \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s.$$

从而

$$\| \boldsymbol{x}'(t) \| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i'(t)|$$

$$\leq \| A(t) \| \, \| \boldsymbol{x}(t) \| + \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s,$$

即有

$$- \| A(t) \| \, \| \boldsymbol{x}(t) \| \leq \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s - \| \boldsymbol{x}'(t) \|.$$

又从条件(A)及(B)得 $k_3 a(t) \leq - \| A(t) \|$, 因此有

$$k_3 a(t) \| \boldsymbol{x}(t) \| \leq \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s - \| \boldsymbol{x}'(t) \|. \tag{8}$$

从而有

$$k k_3 a(t) \| \boldsymbol{x}(t) \| \leq k \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s - k \| \boldsymbol{x}'(t) \|, \tag{9}$$

其中 $k = \dfrac{k_1 - 1}{4k_3} > 0$.

现在取李雅普诺夫泛函

$$V(t, \boldsymbol{x}(\cdot)) = (1 + k k_3) \| \boldsymbol{x} \| + k_1 \int^{t} \int_{t}^{+\infty} \| C(u,s) \| \, \mathrm{d}u \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s, \tag{10}$$

并计算 $V(t, \boldsymbol{x}(\cdot))$ 沿着方程(1)的解的右上导数, 且由条件(A)及式(4), (9), 我们有

$$D V_{(1)}^{+}(t, \boldsymbol{x}(\cdot)) = (1 + k k_3) \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \operatorname{sgn} x_i(t+0)$$

$$+ k_1 \int_{t}^{+\infty} \| C(u,t) \| \, \| \boldsymbol{x}(t) \| \, \mathrm{d}u - k_1 \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s$$

$$\leq (1 + k k_3) [a(t) \| \boldsymbol{x}(t) \| + \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s]$$

$$+ k_1 \int_{t}^{+\infty} \| C(u,t) \| \, \| \boldsymbol{x}(t) \| \, \mathrm{d}u$$

$$- k_1 \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s$$

$$\leq [a(t) + k_1 \int_{t}^{+\infty} \| C(u,t) \| \, \mathrm{d}u] \, \| \boldsymbol{x}(t) \|$$

$$+ [1 + 2k k_3 - k_1] \int^{t} \| C(t,s) \| \, \| \boldsymbol{x}(s) \| \, \mathrm{d}s - k \| \boldsymbol{x}'(t) \|,$$

因为 $k=\frac{k_1-1}{4k_3}>0$, 所以 $1+2kk_3-k_1<0$. 因此由上式及条件(A)即得

$$DV^{+}_{(1)}(t,\boldsymbol{x}(\cdot))\le -k_2\|\boldsymbol{x}\|-k\|\boldsymbol{x}'(t)\|. \qquad (11)$$

从而我们有

$$\begin{aligned}(1+kk_3)\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)\| &\le V(t,\boldsymbol{x}(\cdot))\\ &\le V(t_0,\varphi(\cdot))-k_2\int_0\|\boldsymbol{x}(s)\|\,\mathrm{d}s-k\int_0\|\boldsymbol{x}'(s)\|\,\mathrm{d}s. \qquad (12)\end{aligned}$$

因为 $k_2>0$ 及 $k>0$, 所以由式(12)可知 $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}'(t)\in L(0,+\infty)$. 由此可知当 $t\to+\infty$ 时有 $\boldsymbol{x}(t)\to 0$. 因此方程(1)的零解是渐近稳定的. 定理2证毕.

注1. 定理1及定理2大大改进了文[2]中定理1中的有关结果, 我们的结果不仅适用于 $n>1$ 的情况, 而且也适应于方程(1)的右端函数矩阵 $A(t)$ 及 $\int^{\infty}\|C(u,t)\|\,\mathrm{d}u$ 为无界的情况, 这样大大地扩展了定理的应用范围.

2 应用例子

本节给出两个应用的例子.

例1 考虑下列具有无穷时滞的泛函微分方程

$$\boldsymbol{x}'(t)=\begin{pmatrix}1-5e^{2t} & e^{3t}\\ 1+e^{2t} & -2e^{t}-e^{3t}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\int\begin{pmatrix}e^{-(t-2s)} & 0\\ e^{-t}\sin s & 2e^{-(t-2s)}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad (13)$$

其中 $x\in R^2$, $t\ge 0$. 因为

$$A(t)=\begin{pmatrix}1-5e^{2t} & e^{3t}\\ 1+e^{2t} & -2e^{t}-e^{3t}\end{pmatrix},\quad C(t,s)=\begin{pmatrix}e^{-(t-2s)} & 0\\ e^{-t}\sin s & 2e^{-(t-2s)}\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}a(t)&=\max\{1-5e^{2t}+(1+e^{2t}),\ -2e^{t}-e^{3t}+e^{3t}\}\\ &=\max\{2-4e^{2t},\ -2e^{t}\}=-2e^{t},\end{aligned}$$

$$\|C(u,t)\|=\max\{e^{-(u-2t)}+e^{-u}\sin t,\ 2e^{-(u-2t)}\}=2e^{-(u-2t)},$$

$$\int^{\infty}\|C(u,t)\|\,\mathrm{d}u=2e^{t}.$$

于是我们有

$$a(t)+\int^{\infty}\|C(u,t)\|\,\mathrm{d}u=-2e^{t}+2e^{t}\equiv 0.$$

因此, 定理1中的所有条件都成立. 故由定理1可知方程(13)的零解是稳定的.

例2 考虑下列具有无穷时滞的泛函微分方程

$$\boldsymbol{x}'(t)=\begin{pmatrix}-3e^{t} & e^{t}\sin t\\ 1 & -4e^{t}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\int\begin{pmatrix}e^{-(t-2s)} & 0\\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin s & e^{-(t-2s)}\cos s\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad (14)$$

这里 $x\in R^2$, $t\ge 0$. 由于

$$A(t)=\begin{pmatrix}-3e^{t} & e^{t}\sin t\\ 1 & -4e^{t}\end{pmatrix},$$

$$C(t,s)=\begin{pmatrix} e^{-(t-2s)} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin s & e^{-(t-2s)}\cos s \end{pmatrix},$$

所以我们有

$$a(t)=\max\{-3e^{t}+1,\ -4e^{t}+e^{t}\sin t\}=-3e^{t}+1,$$

$$\|A(t)\|=\max\{3e^{t}+1,e^{t}[4+\sin t]\}=e^{t}[4+\sin t],$$

$$\|C(u,t)\|=\max\{e^{-(u-2t)}+\frac{1}{2}e^{-u}\sin t,\ e^{-(u-2t)}\cos t\}$$

$$=e^{-u+2t}+\frac{1}{2}e^{-u}\sin t,$$

$$\int^{\infty}\|C(u,t)\|\,du=e^{t}+\frac{1}{2}\sin t.$$

现在取常数 $k_1=\frac{5}{4}>1$ 和 $k_2=\frac{1}{8}>0$ 及 $k_3=4>1$, 则有

$$a(t)+k_1\int^{\infty}\|C(u,t)\|\,du=-3e^{t}+1+\frac{5}{4}[e^{t}+\frac{1}{2}\sin t]$$

$$\leq -2e^{t}+\frac{15e^{t}}{8}\leq -\frac{e^{t}}{8}\leq\frac{-1}{8}=-k_2,$$

$$k_3\ a(t)=4[3e^{t}-1]\geq 8e^{t}\geq e^{t}[4+\sin t]=\|A(t)\|.$$

因此定理 2 的所有条件都满足, 故由定理 2 可知方程(14)的零解是渐近稳定的 .

注 2. 显然, 例 1 及例 2 中的系数矩阵 $A(t)$ 和 $C(t,s)$ 及 $\int^{\infty}\|C(u,t)\|\,du$, 都是无界的情况 .

参　考　文　献

1 Burton T A. Volterra integral and differential equations. New York: Academic Press, 1983. 37～41, 133～135

2 王慕秋, 王　联, 杜雪堂. 关于 Volterra 型积分微分方程的稳定性. 应用数学学报, 1992, 15(2): 184～193

3 郑祖庥. 泛函微分方程理论. 合肥: 安微教育出版社, 1994. 393～439

4 李森林, 温立志. 泛函微分方程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1987. 236～289

Asymptotic Stability of Functional Differential Equations with Infinite Time-Lag

Wang Quanyi

(Dept. of Manag Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract In relation to a class of functional differential equations with infinite time-lag, the author deals with the stability and asymptotic stability of their null solutions. Some new results are given. These results are simple in form and easy of verification and application.

Keywords infinite time-lag, functional differential equation, stability, asymptotic stability