

各向异性磁介质中载流圆锥曲线焦点的磁场^{*}

王 建 成

(华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

摘要 应用已导出的磁各向异性介质中的毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式, 求出用极坐标方程 $\gamma = \gamma(\theta)$ 表示的圆锥曲线焦点的磁场, 解决了用定律的笛卡儿坐标形式难以求解的问题.

关键词 磁场, 各向异性, 圆锥曲线, 焦点

分类号 TM 154. 3

求解各向异性磁介质中的磁场问题时, 通常应知道在各向异性磁介质中磁矢势 A 的积分公式^[1,2], 即

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sum_{j=1}^3 \Delta_{ij}}{\mu_{ij}} \frac{\int j_i(\mathbf{x}) dV}{\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \mu_{nm}^{-1} (\gamma_n \gamma_m)^{1/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

文 [3] 应用此公式, 导出在各向异性磁介质中毕奥-萨伐尔定律的笛卡儿坐标形式. 利用该形式的定律, 求出在各向异性磁介质中, 若干种电流分布所激发的磁场. 但是, 求解时要求矢径 $\gamma = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ 的 3 个分量中, 仅有 1 个分量是积分变量, 而其余 2 个分量必须是积分恒量, 才使定律可积. 因此, 应用时受到一定限制.

文 [4] 在文 [3] 的基础上, 进一步导出各向异性磁介质的毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式. 如电流曲线方程的极坐标形式 $\gamma = \gamma(\theta)$ 已知, 则可应用此形式的定律, 求出该电流分布极坐标极点处的磁场. 应用毕奥-萨伐尔定律的笛卡儿坐标形式, 可能难于求解某些分布于某平面内的线电流的磁场; 而应用定律的极坐标形式, 可以简便地求出其极坐标极点的磁场. 本文给出的就是其中的一个范例.

1 各向异性介质中毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式

在各向异性磁介质中, 如果极坐标曲线方程为 $\gamma = \gamma(\theta)$ 的线电流分布于 XY 平面内, 则该线电流在极坐标极点处所激发的磁场为^[4]

$$B = \frac{I}{4\pi} \frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}} \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{d\theta}{\gamma(\theta) \left(\frac{\cos^2 \theta}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2 \theta}{\mu_{22}} \right)^{3/2}}. \quad (1)$$

如果线电流分布于 YZ 平面或 ZX 平面, 则式 (1) 分别变为^[4]

$$B = \frac{I}{4\pi} \frac{\overline{\mu_{11}}}{\mu_{22}\mu_{33}} \theta_2 \frac{d\theta}{\gamma(\theta) \left(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{22}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{33}} \right)^{3/2}} \quad (2)$$

和

$$B = \frac{I}{4\pi} \frac{\overline{\mu_{22}}}{\mu_{11}\mu_{33}} \theta_1 \frac{d\theta}{\gamma(\theta) \left(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{33}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{11}} \right)^{3/2}}. \quad (3)$$

式(1)~(3)为磁各向异性介质中毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式(图1), 式中仅有一个积分变量.

当磁介质为各向同性时, 因有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, 于是式(1)~(3)可简并为

$$B = \frac{\mu I}{4\pi} \theta_2 \frac{d\theta}{\gamma(\theta)}, \quad (4)$$

式(4)为在各向同性磁介质中毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式.

2 载流圆锥曲线焦点的磁场

如图2所示, 圆锥曲线的极坐标方程为

$$\gamma = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \quad (5)$$

式中 e 为离心率, p 为焦点 F 到准线 L 的距离.

对于椭圆、抛物线和双曲线, e 有不同的取值. 当 $0 < e < 1$ 时, 圆锥曲线为椭圆, $e = 0$ 时, 椭圆退化为圆; 当 $e = 1$ 时, 曲线为抛物线; 当 $e > 1$ 时, 曲线为双曲线.

设圆锥曲线电流分布于 XY 平面, 将式(5)代入式(1)得

$$\begin{aligned} B &= \frac{I}{4\pi} \frac{\overline{\mu_{33}}}{\mu_{11}\mu_{22}} \theta_2 \frac{(1 - e\cos\theta)d\theta}{ep \left(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{22}} \right)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{4\pi ep} \frac{\overline{\mu_{33}}}{\mu_{11}\mu_{22}} \theta_2 \frac{d\theta}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{22}} \right)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{I}{4\pi p} \frac{\overline{\mu_{33}}}{\mu_{11}\mu_{22}} \theta_2 \frac{\cos\theta d\theta}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{22}} \right)^{3/2}} \\ &= B_1 - B_2. \end{aligned} \quad (6)$$

$$B_1 = \frac{I}{4\pi ep} \frac{\overline{\mu_{33}}}{\mu_{11}\mu_{22}} \theta_2 \frac{d\theta}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{22}} \right)^{3/2}}, \quad (7)$$

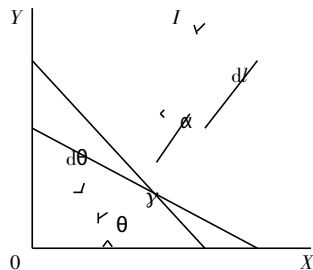


图1 极坐标形式

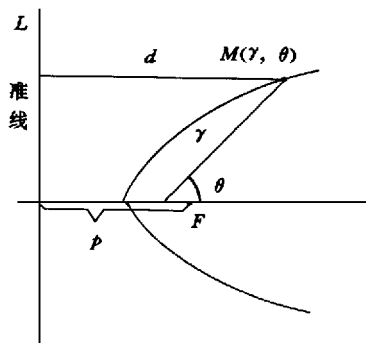


图2 圆锥曲线

$$B_2 = \frac{I}{4\pi p} \frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}} \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{\cos\theta d\theta}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{22}}\right)^{3/2}}. \quad (8)$$

2.1 对于椭圆

圆锥曲线为椭圆, 则 $0 < e < 1$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. 令 $K^2 = (\mu_{22} - \mu_{11})/\mu_{22} < 1$, 代入式(7)得

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_{11}I}{\pi ep} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - K^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_{11}I}{2ep} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 3K^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 5K^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 7K^6 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

若仅取第1项, 由式(9)得

$$B_1 = \frac{\mu_{11}I}{2ep} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}}. \quad (10)$$

现计算式(8), 令 $\operatorname{tg}\theta = t$, 则有

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1+t^2}, \\ d\theta &= \frac{dt}{1+t^2}, \quad t_1 = \operatorname{tg}\theta_1, \quad t_2 = \operatorname{tg}\theta_2, \end{aligned}$$

代入式(8)得

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{I}{4\pi p} \frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}} \frac{dt}{(1+t^2)}}{\left[\frac{1}{(1+t^2)\mu_{11}} + \frac{t^2}{(1+t^2)\mu_{22}}\right]^{3/2}} \\ &= \frac{I\mu_{11}}{4\pi p} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}} \left[\frac{\operatorname{tg}\theta_2}{(\mu_{22} + \mu_{11}\operatorname{tg}^2\theta_2)^{1/2}} - \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{(\mu_{22} + \mu_{11}\operatorname{tg}^2\theta_1)^{1/2}} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此, 由式(6)和式(10)可得分布于 XY 平面内的椭圆电流焦点的磁场为

$$B = \frac{\mu_{11}I}{2ep} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}}, \quad (11)$$

当椭圆电流分布于 YZ 平面或 ZX 平面时, 同样可以得出 $B_2 = 0$. 于是, 上式分别变为

$$B = \frac{\mu_{22}I}{2ep} \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} \quad (12)$$

或

$$B = \frac{\mu_{33}I}{2ep} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}}, \quad (13)$$

作为特例, 当 $e = 0$ 时, 椭圆退化为圆. 此时, $ep = R$ (R 为圆的半径), 圆电流分布于 XY , YZ 和 ZX 平面时, 圆电流中心的磁场分别为

$$B = \frac{\mu_{11}I}{2R} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}}, \quad B = \frac{\mu_{22}I}{2R} \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}, \quad B = \frac{\mu_{33}I}{2R} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}},$$

其结果与文[4]相一致.

当介质为各向同性时, 因有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, 且式(9)展开式中 $K = 0$, 于是式(11)~(13)化为通常情况下, 载流椭圆曲线焦点处的磁场

$$B = \frac{\mu I}{2ep}, \quad (14)$$

这是已知的结果^[6].

当椭圆退化为圆($ep = R$)时, 则式(14)化为 $B = \frac{\mu I}{2R}$, 这是公认的结果.

2.2 对于抛物线

圆锥曲线为抛物线($e = 1$)时, 则式(5)变为 $y = p/(1 - \cos\theta)$. 当抛物线电流分布于 XY , YZ 和 ZX 平面时, 同样分别可求得其焦点的磁场为

$$B = \frac{\mu_{11}I}{2p} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}}, \quad B = \frac{\mu_{22}I}{2p} \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}, \quad B = \frac{\mu_{33}I}{2p} \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}}.$$

当介质为各向同性时, 同样可以得到载流抛物线焦点的磁场为 $B = \frac{\mu I}{2p}$, 其结果也是已知的^[6].

2.3 对于双曲线

当圆锥曲线为双曲线($e > 1$)时, 双曲线有对称的两支. 假设通有电流 I 的双曲线分布于 XY 平面, 如图3所示. 先考虑圆中右边的一支, 由图3可知 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a} > 1$, $\theta_0 = \theta (2\pi - \theta_0)$.

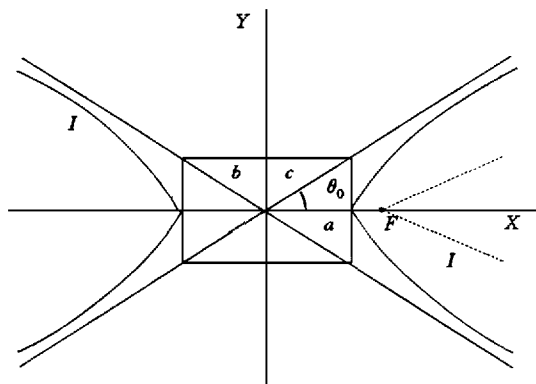


图3 双曲线

把双曲线右边一支的电流在焦点 F 产生的 B_2 记为 B_2 , 左边一支电流在焦点 F 产生的 B_2 记为 B_2 . 因有

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1},$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \theta_0 = -\frac{b}{a} = -\sqrt{e^2 - 1},$$

代入式(8)得

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{I}{4\pi p} \frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}} \frac{\cos\theta_0}{\left(\frac{\cos^2\theta_0}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2\theta_0}{\mu_{22}}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{I\mu_{11}}{4\pi p} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}} \left[\frac{\operatorname{tg} \theta_0}{(\mu_{22} + \mu_{11}\operatorname{tg}^2\theta_0)^{1/2}} - \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{(\mu_{22} + \mu_{11}\operatorname{tg}^2\theta_0)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

$$= - \frac{I\mu_{11}\mu_{33}}{2\pi p} \frac{\overline{e^2 - 1}}{[\mu_{22} + \mu_{11}(e^2 - 1)]^{1/2}}. \quad (15)$$

同理, 对于双曲线左边一支电流, 因有

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_1 &= -\operatorname{tg}\theta_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{\overline{e^2 - 1}}{e^2 - 1}, \\ \operatorname{tg}\theta_2 &= \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{b}{a} = \frac{\overline{e^2 - 1}}{e^2 - 1}, \end{aligned}$$

代入式(8)得

$$B_2 = \frac{I\mu_{11}\mu_{33}}{2\pi p} \frac{\overline{e^2 - 1}}{[\mu_{22} + \mu_{11}(e^2 - 1)]^{1/2}}. \quad (16)$$

由式(15)和式(16)叠加, 得

$$B_2 = B_2 + B_2 = 0.$$

于是, 可得圆锥曲线为双曲线时, 其焦点的磁场仍为

$$B = \frac{\mu_{11}I}{2ep} \frac{\mu_{33}}{\mu_{22}},$$

当介质为各向同性时, 因有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, 可得 $B = \frac{\mu I}{2ep}$, 其结果与文[5]一致.

同理, 可以计算出左边一个焦点的磁场, 其结果一样. 如果双曲线电流分布于 YZ 平面或 ZX 平面, 同样可以计算出类似的结果.

参 考 文 献

- 1 陈 年, 陈 洁. 各向异性磁介质的电感新公式. 电子科学学刊, 1991, 13(2): 159 ~ 168
- 2 陈 年, 王建成. 各向异性磁矢势 A 的微分方程及其解. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(1): 90 ~ 97
- 3 王建成, 陈 年. 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(2): 125 ~ 132
- 4 王建成, 陈 年. 各向异性磁介质毕奥-萨伐尔定律极坐标形式. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 354 ~ 357
- 5 蔡 领. Biot-Savart 定律的极坐标形式. 华东冶金学院学报, 1992, 9(2): 116 ~ 121

Magnetic Field at the Focus of Entraining Conical Curve in Anisotropic Magnetic Medium

Wang Jiancheng

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The magnetic field at the focus of conical curve expressed by polar equation $r = r(\theta)$ can be solved by applying the derivated polar coordinate form of Biot-Savart law in magnetic anisotropic medium. It solves the problem that is difficult to be solved by Cartesian coordinate form of the law.

Keywords magnetic field, anisotropy, conical curve, focus