

# 多变量不确定性模型的摄动分析<sup>\*</sup>

王启志 王永初

( 华侨大学机电工程系, 泉州 362011 )

**摘要** 根据对象模型的 3 种结构, 提出控制系统不确定性模型的规范化描述方法. 利用鲁棒稳定性原理及奈魁斯特 MIMO 稳定性准则, 给出对象模型满足系统稳定条件的最大模型摄动范围, 这种分析方法可用于 MIMO 系统的分析设计.

**关键词** 摄动分析, MIMO 系统, 鲁棒稳定性, 稳定性分析

**分类号** TP 273

## 1 不确定性模型的结构

控制系统模型决定了控制器的设计, 由于模型在辨识过程的近似性或局限性, 使得它往往包含有不确定性因素<sup>[1]</sup>. 在单变量系统中, 对象模型  $g(S)$ 、辨识预估模型  $\hat{g}(S)$  与不确定性模型  $\Delta g(S)$  的关系为

$$g(S) = \hat{g}(S) + \Delta g(S), \quad (1)$$

$g(S)$  相当于  $\hat{g}(S)$  与  $\Delta g(S)$  的并联. 但是, 多变量对象模型

$$G(S) = \begin{bmatrix} g_{11}(S) & g_{12}(S) & \dots & g_{1n}(S) \\ g_{21}(S) & g_{22}(S) & \dots & g_{2n}(S) \\ & & \ddots & \\ g_{n1}(S) & g_{n2}(S) & \dots & g_{nn}(S) \end{bmatrix}$$

同预估模型 (或称设计模型)  $\hat{G}(S)$  与不确定性模型  $\Delta G_p(S)$  的结构关系比较复杂, 基本上可以归纳为图 1 中的 3 种结构形式<sup>[2]</sup>.  $G(S)$  是一种广义模型<sup>[3]</sup>, 包含输入部分 (如执行机构和调节阀

等)、对象与输出部分 (如检测系统等). 图 1(a) 的不确定性属于被控制对象本身, 图 1(b), (c)

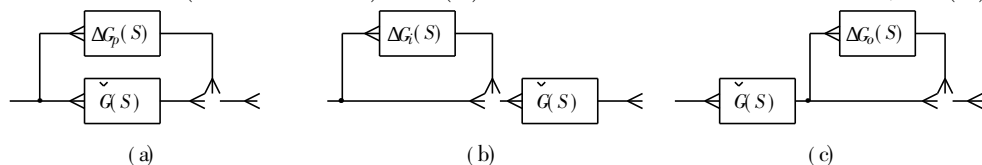


图 1 3 种不确定性模型的结构

则分别表示属于输入与输出部分. 这 3 个不确定性源可以分别解释为时变对象、输入不确定性

扰动及输出噪声干扰.

系统的不确定因素可记为

$$\Delta G_k(S) = \bar{l}_k(S) \Delta(S), \quad (2)$$

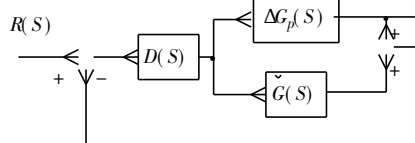
其中  $\Delta(S)$  为系统规模化摄动,  $\Delta(S)$  与  $G(S)$  及  $\Delta G(S)$  同维, 即为  $n \times n$  矩阵;  $\bar{l}_k(S), k = p, i, o$  为权函数和最大值. 即

$$\bar{l}_k(\omega) = \max l_k(\omega) \quad k = p, i, o, \quad \forall \omega \quad (3)$$

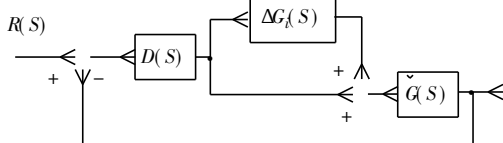
显然, 系统的规范摄动  $\Delta(S)$  可作为控制系统的一个组成部分, 对系统的鲁棒性产生影响.

## 2 规范化摄动模型

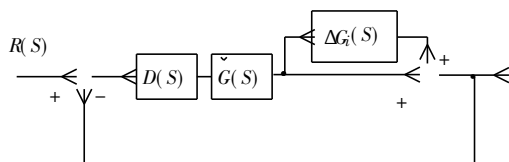
图1中的3种不确定模型若同控制器  $D(S)$  构成闭环单位反馈控制系统, 则如图2所示. 为了分析问题, 可将系统划分成两大部分: (1) 不变化的部分  $\bar{G}_k(S)$ ; (2) 变化的部分  $\Delta(S)$  (即摄动模型). 由此两部分重构系统, 如图3所示. 为了推导  $\bar{G}_k(S)$ , 将图2的3个方框图等效变



(a)



(b)



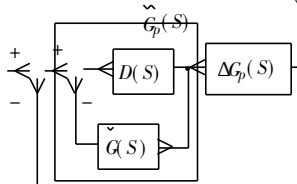
(c)

图2 同图1对象对应的闭环控制系统

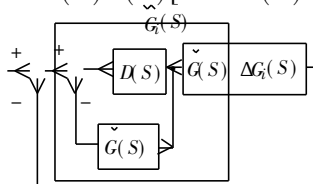
图3 重构单位反馈控制系统

换成图4的对应3个方框图. 图中虚线框内部可分别写成

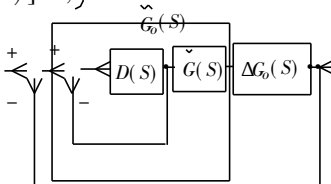
$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_p(S) &= D(S)[I + D(S)\hat{G}(S)]^{-1}, \\ \bar{G}_i(S) &= D(S)\hat{G}(S)[I + D(S)\hat{G}(S)]^{-1}, \\ \bar{G}_o(S) &= D(S)\hat{G}(S)[I + D(S)\hat{G}(S)]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



(a)



(b)



(c)

图4 图2的等效变换方框图

如果将  $\Delta G_k(S), k = p, i, o$  的不变部分并入式(4), 可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_p(S) &= D(S)[I + D(S)\hat{G}(S)]^{-1}\bar{l}_p, \\ \bar{G}_i(S) &= D(S)\hat{G}(S)[I + D(S)\hat{G}(S)]^{-1}\bar{l}_i, \\ \bar{G}_o(S) &= D(S)\hat{G}(S)[I + D(S)\hat{G}(S)]^{-1}\bar{l}_o, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

于是得到图 3 所示的重构系统.

(1) 图 2(a) 的不确定性模型系统, 其稳定必要条件为  $D(S)$  与  $\hat{G}(S)$  并联系统稳定, 且  $\bar{G}_p(S)$  与  $\Delta(S)$  串联单位反馈系统稳定.

(2) 图 2(b), (c) 的不确定性模型, 其稳定的必要条件是  $D(S)$  与  $\hat{G}(S)$  串联单位反馈系统稳定, 且  $\bar{G}(S)$  与  $\Delta(S)$  串联单位反馈系统稳定.

### 3 鲁棒性条件分析

具有不确定性模型的系统, 其设计的最基本要求就是满足其鲁棒性条件<sup>[6]</sup>.

一个以状态方程式描述的 MIMO 系统, 可记成

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \\ Y &= CX + DU, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

经拉普拉斯变换, 并加以整理可得

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D \triangleq \{g_{ij}(S)\}, \quad (7)$$

状态方程式的系统矩阵  $A$  与传递函数多项式矩阵  $G(S)$  有本质联系.  $G(S)$  稳定意味着  $g_{ij}(S)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  均稳定, 即  $A$  的本征值  $\lambda$  满足  $\text{Re}\{\lambda\} < 0$ . 由于  $\lambda_i$  为负, 其平方形式为

$$\xi_i = \lambda\{A^H A\} \quad 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

式中  $A^H$  为  $A$  的转置,  $\lambda\{A^H A\}$  表示对矩阵  $A^H A$  最本征值. 记为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \overline{\xi_i} = \overline{\lambda\{A^H A\}} \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \rho_A &= \max \lambda\{A\} \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

SISO(单输入-单输出)系统的 Nyquist 稳定性定理可以推广到 MIMO(多输入-多输出)系统. Nyquist 稳定性定理指出: 一个稳定的开环系统, 其单位反馈闭环控制, 闭环稳定的条件为  $[1 + \bar{G}_k(\omega)\Delta(\omega)]$  的轨线不包含奈氏图上的原点, 或者  $\bar{G}_k(\omega)\Delta(\omega)$  的轨线不包含  $(-1, j0)$  点. 因此, 不难得出 MIMO 系统的稳定性定理, 对于所有的摄动  $\Delta\{\bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$ , 当且仅当下列条件满足

$$\left. \begin{aligned} \det(I - \bar{G}_k(\omega)\Delta(\omega)) &> 0, \quad \forall \omega \\ \bar{\sigma}(\Delta) &< 1; \quad \bar{\sigma}(\Delta) < \Delta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

图 3 系统稳定. 证明

$$\bar{G}_k \cdot \Delta = \bar{G}_k \cdot \Delta \quad \bar{G}_k \cdot \Delta,$$

因为  $\bar{G}_k \cdot \Delta = \lambda\{\bar{G}_k\} \cdot \Delta$ , 可得出  $\lambda\{\bar{G}_k\} < \bar{G}_k$ ,  $\rho\{\bar{G}_k\} < \bar{G}_k$ . 式(10)说明  $\bar{G}_k < 1$ , 可推导出  $\rho\{\bar{G}_k\} < 1$ , 即  $\bar{G}_k(\omega)$  在多维空间的半径小于 1. 因此,  $\det[1 + \bar{G}_k(\omega)\Delta(\omega)]$  不包围状态空间的原点; 反之, 如果存在一个摄动  $\Delta_1(\omega)$ ,  $\sigma(\Delta_1) < 1$ , 使  $\rho\{\bar{G}_k\} < 1$ , 即  $\det[1 - \bar{G}_k(\omega)\Delta_1(\omega)]$  包围原点, 必然可找到一个  $\epsilon \in [0, 1]$ , 使式(10)满足. 即

$$\det[1 + \bar{G}_k(\omega)\epsilon\Delta(\omega)] > 0, \quad \forall \omega$$

因  $\epsilon\Delta(\omega)$  仍然满足  $\sigma(\epsilon\Delta) < 1$ , 所以后面的一种假设是不存在的. 由多变量 Nyquist 判据可知, 轨线  $M(\omega) = \bar{G}_k(\omega)\Delta(\omega)$ ,  $\forall \omega$  在  $n$  维空间中, 不包含  $(-1, j0)$  点是图 3 重构系统稳定的充要条件, 可得出系统鲁棒稳定条件式为

$$\bar{G}_k(\omega) < 1, \quad k = p, i, o, \quad \forall \omega. \quad (11)$$

因为 Nyquist 判据说明

$$\sup M(\omega) = \max G_k(\omega) = \max \Delta(\omega), \quad (12)$$

且知  $\max \Delta(\omega) < 1$ ,  $\sup M(\omega) = \max G_k(\omega) < 1$ , 所以满足式(11)的条件, 无论  $\omega$  为何值系统均为稳定。

## 4 小结

由上述摄动分析, 可以得到如下结论.

(1) 式(5)中  $\bar{G}_i(S)$ ,  $\bar{G}_o(S)$  可记为

$$\bar{G}_k(S) = H(S) \bar{L}_k \quad k = o, i,$$

其中  $H(S) = D(S) \hat{G}(S) [I + D(S) \hat{G}(S)]^{-1}$ ,  $\bar{L}_k(S) = \Delta G_k(S) \times \Delta(S)^{-1}$ ,  $k = o, i$ .  $H(S)$  为图 5 系统的闭环传递函数, 控制器  $D(S)$  的选择必须满足  $\bar{G}_k(\omega) < 1$  或

$$\sup D(\omega) \hat{G}(\omega) [I + D(S) \hat{G}(S)]^{-1} < \frac{1}{\bar{L}_k}, \quad \forall \omega \quad k = o, i. \quad (13)$$

(2) 同样, 式(5)的  $\bar{G}_p(S)$  也可写成

$$\bar{G}_p(S) = H_p(S) \bar{L}_k,$$

其中  $H_p(S) = D(S) [I + D(S) \hat{G}(S)]^{-1}$ ,  $\bar{L}_p(S) = \Delta G_p(S) \Delta(S)^{-1}$ . 鲁棒稳定条件为

$$\sup D(S) [I + D(S) \hat{G}(S)]^{-1} < \frac{1}{\bar{L}_p}, \quad \forall \omega \quad (14)$$

因此, 系统鲁棒性应同时满足式(13)与式(14). 比较  $H$  与  $H_p$ , 得

$$H(S) = H_p(S) \hat{G}(S),$$

由于  $\hat{G}(S)$  经常呈现低通滤波特性<sup>[1]</sup>, 因此  $H_p(S)$  比  $H(S)$  更具高通滤波特性.

## 参 考 文 献

- 1 王永初, 陈庄金, 李钟慎. 现代控制工程设计基础. 广州: 暨南大学出版社, 1997. 403 ~ 445
- 2 Morari M. Robust process control. New York: Prentice Hall, 1992. 320 ~ 346
- 3 Jafiriou E. Digital controller for SISO system. Int. J. Control, 1985, 44(6): 786 ~ 812
- 4 任秀珍. 利用条件功换调节方式提高控制系统调节品质. 华侨大学学报(自然科学版), 1987, 8(4): 460 ~ 466

# Perturbation Analysis of Multivariable Model of Uncertainty

Wang Qizhi      Wang Yongchu

(Dept. of Mech. & Electr. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** Based on three structures of object model, a standardized method is advanced for describing uncertainty model of control system. By making use of principle of robustability and criterion of Nyquist MIMO stability, the maximum perturbed region for object model to satisfy the stability condition of system is given.

This analytical method can be applied to analysis and design of MIMO system.

**Key words** perturbation analysis, MIMO system, robustability, stability

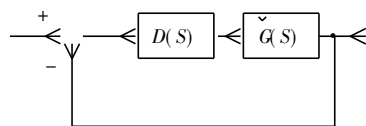


图5  $H(S)$  系统的构成